تم بيـع أكثر من ٣٠ مليون نسخـة من ملخصات شـوم!

الكهرومغناطيسيات

ملخصـات شـوم
إيـزى

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



جوزيف إدمنستر

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

الكهرومغناطيسيات

المؤلف

چوزيف إدمنستر

محرر الموجز

ويليام سميث

ترجمة

دكتور مهندس / صبرى محمد إبراهيم

أستاذ مساعد بكلية الهندسة بحلوان

جامعة حلوان

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

Electromagnetics

by

Joseph Edminister

International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج . م . ع .

ص . ب : 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون : 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

بريد إلكترونى : ihci@link.net

رقم الإيداع : 2003/9485

I.S.B.N: 977-282-147-8

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الفيزياء التطبيقية
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية
ملخص شوم إيـزى : الوراثة
ملخص شوم إيـزى : الجبر العام
ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى
ملخص شوم إيـزى : علم الهندسة
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء
ملخص شوم إيـزى : الاحتمالات والإحصاء
ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : مبادئ التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : حساب المثلثات
ملخص شوم إيـزى : الرياضيات المنفصلة
ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA
ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى
ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة
ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

جوزيف أ. إدمنستر مدير مكتب العلاقات التعاونية بكلية الهندسة بجامعة كورنيل وأستاذ غير متفرغ بجامعة أكرون حيث عمل بها أستاذاً للهندسة الكهربائية، ونائبًا لكل من رئيس القسم والعميد. حصل على درجتى البكالوريوس والماجستير فى علوم الهندسة الكهربائية من جامعة أكرون، عمل كنائب ومسجل اختراعات بولاية أوهايو. قام بتدريس تحليل الدوائر الكهربائية ونظرية الكهرومغناطيسية خلال عمله الأكاديمى.

ويليام ت. سميث أستاذ مشارك بقسم الهندسة الكهربائية بجامعة كنتاكى وهناك قام بالتدريس منذ 1990. ونال جائزة الأساتذة المتميزيين مرتين. حصل على درجة البكالوريوس من جامعة كنتاكى وحصل على درجة الماجستير فى الهندسة الكهربائية من معهد الصنائع والفنون بفرجينيا ودرجة الدكتوراه فى الهندسة الكهربائية من جامعة ولاية فرجينيا. اشترك فى تأليف عدد من المقالات العلمية فى المؤتمرات والمجلات. قام بتحرير ملخص شوم إيزى فى أساسيات الكهرباء. عمل كزائر أكاديمى بمعمل أبحاث تابع لشركة IBM.

صبرى محمد إبراهيم أستاذ مساعد بكلية الهندسة بحلوان ـ جامعة حلوان، حصل على البكالوريوس من المعهد العالى الصناعى بالقاهرة فى الهندسة الكهربائية، ودرجتى الماجستير والدكتوراه فى الهندسة الكهربائية من جامعة جورج واشنطن بالولايات المتحدة الأمريكية. قام بتدريس نظرية المجالات والهوائيات وانتشار الموجات وهندسة الموجات الدقيقة بكل من كلية الهندسة بحلوان وكلية الهندسة بالعين جامعة الإمارات العربية المتحدة. كما اشترك فى تأليف عدد من المقالات العلمية بالمجلات والمؤتمرات.

الـمحتويات

الفصل الأول
تحليل المتجهات
Vector Analysis

فى هذا الفصل:

- ✔ **اصطلاحات المتجهات**
- ✔ **جبر المتجهات**
- ✔ **نظم الإحداثيات**
- ✔ **العناصر التفاضلية للحجم والسطح والخط**
- ✔ **مسائل محلولة**



توصف المتجهات فى مقررات الفيزياء والرياضيات بنظام المحاور الكرتيزية بصفة أساسية وبالرغم من وجود واستخدام المحاور الأسطوانية أيضًا فى مراجع الرياضيات إلا أن نظام المحاور الكروية نادراً ما يستخدم. فى مجال الكهرومغناطيسيات ينبغى استخدام نظام المحاور الثلاثة. حيث أن الرموز المستخدمة للمتجهات ونظم المحاور تختلف من مرجع إلى آخر، لذا فإن الفهم الصحيح للترميز المستخدم هنا فى هذا المرجع يكون ضروريًا لوضع المسائل والحصول على حلول لها.

اصطلاحات المتجهات Vector Notation

للتفرقة بين المتجهات (التى لها مقدار واتجاه) والمقياسيات (التى لها مقدار فقط) فإن المتجهات تكتب بالخط الأسود الثقيل. متجـه الوحـدة لـه مقـدار (أى طول) يساوى الوحدة وليس له وحدات لأنه يمثل الاتجـاه فقـط. متجـه الوحدة سوف يرمز له بحرف صغير بالخط الأسود الثقيـل مثـل **a**. متجـهات الوحدة فى اتجاه المحور x، y، z فى نظام المحاور الكرتيزية هى $\mathbf{a}_x$، $\mathbf{a}_y$، $\mathbf{a}_z$.

المتجه **A** يمكن كتابته بدلالة مركباته كما يلى

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{a}_x + A_y\,\mathbf{a}_y + A_z\,\mathbf{a}_z$$

بدلالة المركبات فإن القيمة المطلقة للمتجه **A** تعرف كالآتى

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ومتجه الوحدة فى اتجاه **A** يعطى كالآتى

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}$$

جبر المتجهات Vector Algebra

1. يمكن جمع وطرح المتجهات.

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{a}_x + A_y\,\mathbf{a}_y + A_z\,\mathbf{a}_z) \pm (B_x\,\mathbf{a}_x + B_y\,\mathbf{a}_y + B_z\,\mathbf{a}_z)$$
$$= (A_x \pm B_x)\,\mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y)\,\mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z)\,\mathbf{a}_z$$

2. قوانين الترافق والتوزيع والتبادل يمكن تطبيقها

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

3. الضرب المقياسى لمتجهين يعرف كما يلى

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A\, B \cos\theta$$ (تقرأ "A ضرب مقياسى B")

حيث θ هى الزاوية الصغرى بين A و B. بدلالة المركبات فإن الضرب المقياسى يساوى

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

هذا يعطى

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}}$$

☆ ملاحظة!

المتجهات المتعامدة تعطى ضرب مقياسى يساوى الصفر نتيجة لأن الزاوية المتضمنة تساوى 90°. كاستخدام لهذه الخاصية الهامة للمتجهات والتى تأتى من الضرب المقياسى لمتجه الوحدة:

$$\boldsymbol{a}_x \bullet \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_y \bullet \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x \bullet \boldsymbol{a}_z = 0$$

أيضًا نلاحظ أن

$$\boldsymbol{a}_x \bullet \boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_y \bullet \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z \bullet \boldsymbol{a}_z = 1$$

مثال 1.1 الضرب المقياسى يخضع لقانون التوزيع وقانون ضرب الكميات المقياسية

$$\mathbf{A} . (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} . \mathbf{B} + \mathbf{A} . \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} . k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} . \mathbf{B})$$

باستخدام خواص الضرب المقياسى أثبت الخاصية الثالثة من المذكور أعلاه.

Example 1.1 The dot product obeys the distributive and scalar multiplcation laws

$$\mathbf{A} . (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} . \mathbf{B} + \mathbf{A} . \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} . k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} . \mathbf{B})$$

Using the properties of the dot product, prove property 3 from above.

الحل:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \bullet (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z)$$

$$= A_x B_x (\mathbf{a}_x \bullet \mathbf{a}_x) + A_y B_y (\mathbf{a}_y \bullet \mathbf{a}_y) + A_z B_z (\mathbf{a}_z \bullet \mathbf{a}_z)$$

$$+ A_x B_y (\mathbf{a}_x \bullet \mathbf{a}_y) + \ldots\ldots + A_z B_y (\mathbf{a}_z \bullet \mathbf{a}_y)$$

فى كل الأحوال، $\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_i = 1$ حيث ($i = x$ أو y أو z) وأيضًا $\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = 0$ حيث $i \neq j$ على ذلك تم إثبات الخاصية الثالثة

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

4. الضرب الاتجاهى لمتجهين يعرف كما يلى

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A B \sin\theta)\mathbf{a}_n$$ (تقرأ "A ضرب اتجاهى B")

حيث θ هى الزاوية الصغرى بين **A** و **B** ومتجه الوحدة $\mathbf{a}_n$ يكون عموديًا على المستوى المار بـ **A** و **B** عندما يتم رسمها من نقطة مشتركة. هناك عمودان على هذا السطح. متجه الوحدة الذى نختاره هو اتجاه حركة مسمار بريمة عندما يتحرك **A** فى اتجاه **B** (شكل 1.1) هذا أيضًا يعرف بـ "قاعدة اليد اليمنى" Right-Hand Rule (حرك **A** فى اتجاه **B** فى اتجاه أصابع اليد اليمنى ويشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الصحيح لمتجه الوحدة). لهذا نجد أن الضرب الاتجاهى لا يطبق عليه قانون التبادل

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$



تذكر !

المتجهات المتوازية تعطى ضربًا اتجاهيًا يساوى صفرًا لأن الزاوية المتضمنة تساوى $0°$.

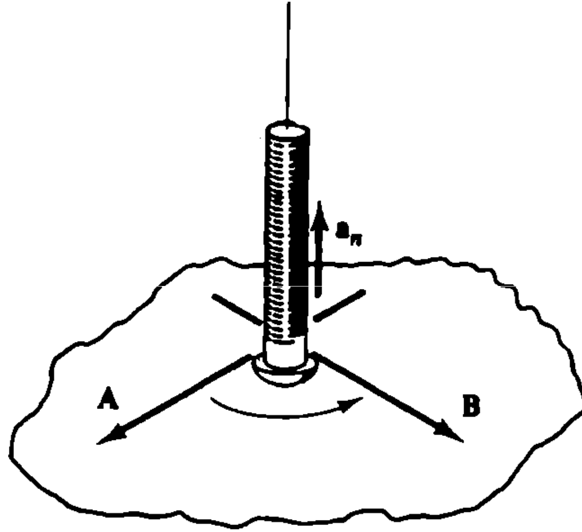
وبكتابة الضرب الاتجاهى بدلالة المركبات فإن

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \times (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z)$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z$$

وهناك طريقة استخدام صورة المحدد لحساب الضرب الاتجاهى

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



شكل 1-1 اختيار اتجاه $\mathbf{a}_n$

مثال 1.2 إذا كان $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$ أوجد $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Example 1.2 Given $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ and $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$, find $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ and $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

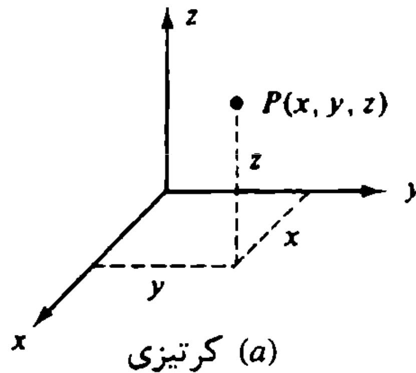
الحل:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (2)(1) + (4)(-1) + (-3)(0) = -2$$

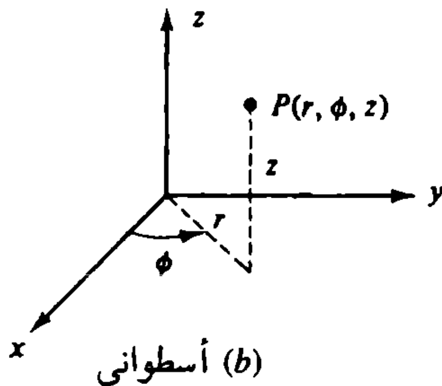
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y-6\mathbf{a}_z$$

نظم الإحداثيات Coordinate Systems

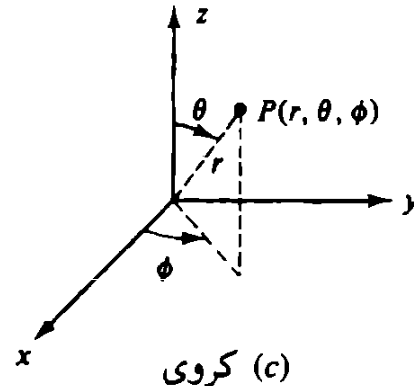
يمكن التعبير وحل المسائل التى بها تماثل أسطوانى أو تماثل كـروى عـن طريق استخدام النظام الكرتيزى المـألوف. ولكـن فـى هـذه الحالـة يصعـب الاستفادة من المتماثل ويكون الحل معقدًا بدون داع. على سبيل المثال فى مسائل الخطوط نستخدم الإحداثيات الأسطوانية وفى مسائل الهوائيات يكون الحل باستخدام الإحداثيات الكروية.



(a) كرتيزى



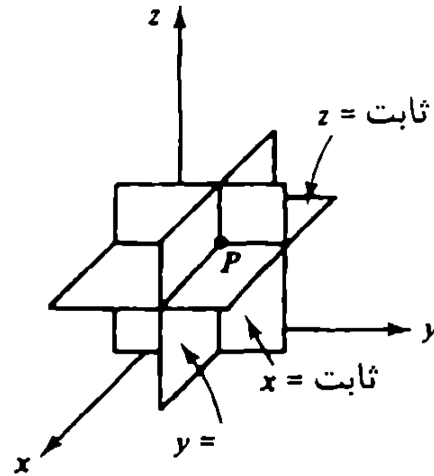
(b) أسطوانى



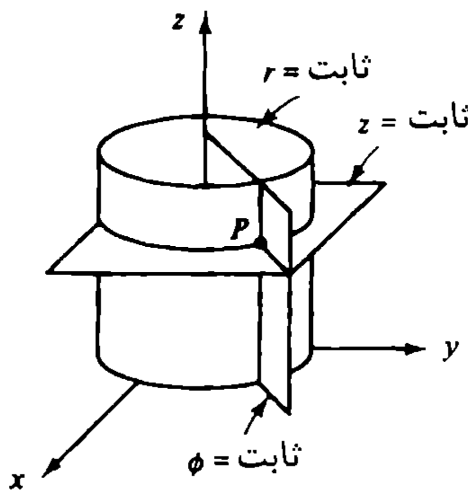
(c) كروى

شكل 2-1 تعريف المتغيرات فى نظم الإحداثيات الثلاثة

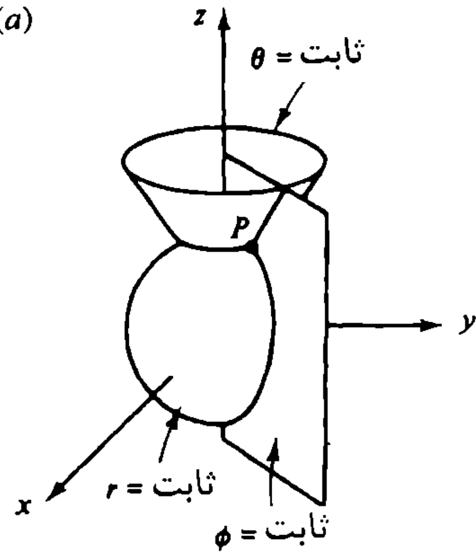
النقطة P يمكن وصفها عن طريق نظم الإحداثيات الثلاثة. ففى الكرتيزية (x, y, z) وفى الأسطوانية الدائرية (r, ϕ, z) وفى الكروية (r, θ, ϕ) كما هو موضح بالشكل 1.2. نفس الرمز r يستخدم فى نظامى الإحداثيات الأسطوانية والكروية ولكن فى كل نظام يمثل شيئًا مختلفًا. فى الإحداثيات الأسطوانية r تمثل المسافة العمودية بين النقطة P ومحور z. فى الإحداثيات الكروية r هى



(a) كرتيزى



(b) أسطوانى



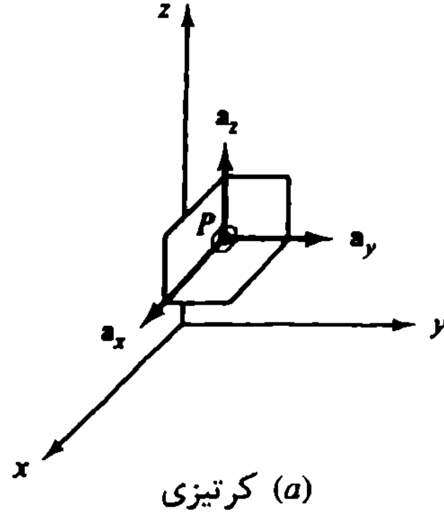
(c) كروى

شكل 1-3 أسطح القيم الثابتة لنظم الإحداثيات الثلاثة

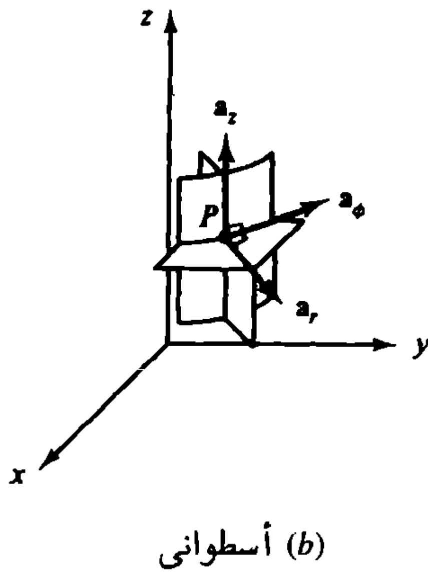
المسافة من نقطة الأصل حتى النقطة P. ومن سياق الكلام للمسألة يجب أن يكون واضحًا المقصود من r. الزاوية ϕ هى نفس الزاوية فى نظامى الإحداثيات الأسطوانية والكروية. حدود ϕ هى $0 \le \phi \le 2\pi$ مقاسه على المستوى x-y ابتداء من محور x وتزيد فى اتجاه y. فى الإحداثيات الكروية الزاوية θ تقاس بين محور z والخط الواصل من نقطة الأصل حتى النقطة P. حدود θ هى $0 \le \theta \le \pi$. المتغير z هو نفسه فى نظامى الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية.

النقطة فى الفراغ يمكن أيضًا وصفها عن طريق تقاطع ثلاثة أسطح متعامدة كما هو موضح بشكل 3-1. فى الإحداثيات الكرتيزية هذه الأسطح هى المستويات اللانهائية x = ثابت، y = ثابت، z = ثابت. فى الإحداثيات الأسطوانية z = ثابت هو نفس المستوى كما فى الكرتيزية، ϕ= ثابت هو نصف مستوى حافته تقع على محور z، r = ثابت هو سطح أسطوانة دائرية قائمة.

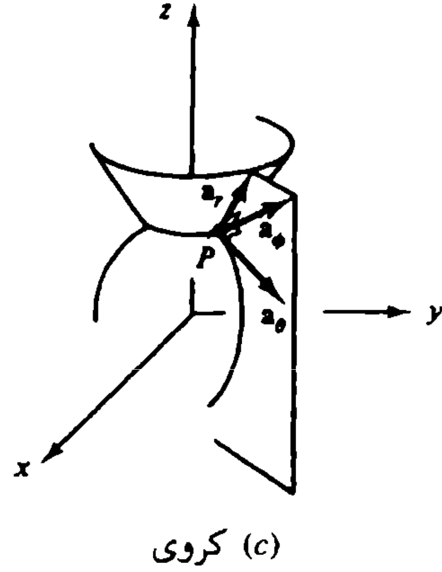
الثلاثة أسطح هذه فى الإحداثيات الأسطوانية متعامدة ومتقاطعة فى نقطة وهذه النقطة تحدد مكان P. فى الإحداثيات الكروية ϕ = ثابت هو نفس النصف مستوى كما فى الأسطوانية، r = ثابت هى كرة مركزها نقطة الأصل، θ = ثابت هو مخروط دائرى محوره على محور z ورأسه عند نقطة الأصل هذه الأسطح متعامدة وتقاطعها يحدد النقطة P.



(a) كرتيزى



(b) أسطوانى



(c) كروى

شكل 4-1 اتجاه متجهات الوحدة لنظم الإحداثيات الثلاثة

شكل 4-1 يبين متجهات الوحدة الثلاثة عند النقطة P. فى حالة نظام الإحداثيات الكرتيزية هذه المتجهات لها اتجاه ثابت لا يعتمد على مكان النقطة P. هذا غير صحيح لنظام الإحداثيات الأخرى (ماعدا a_z). كل متجه وحدة يكون عموديًا على سطح الإحداثى التابع له ويكون فى اتجاه زيادة الإحداثى.

ملاحظة!

كل نظم الإحداثيات تتبع قاعدة اليد اليمنى:

$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$ $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$

المركبات التى تُكَون المتجه فى النظم الثلاثة هى

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$ (كرتيـزى)

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$ (أسطوانى)

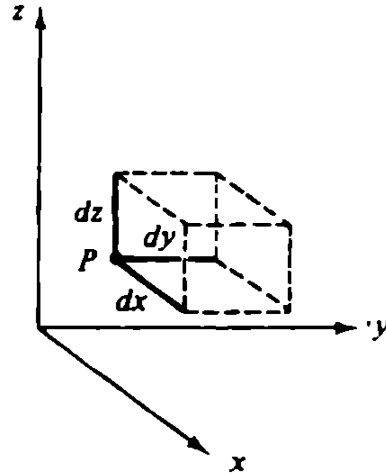
$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$$ (كـــروى)

يجب ملاحظة أن المركبات A_x، A_y، A_z، .... إلخ، ليست ثابتة بصفة عامة ولكن غالبًا تكون دوال فى الإحداثيات فى ذلك النظام.

العناصر التفاضلية للحجم والسطح والخط

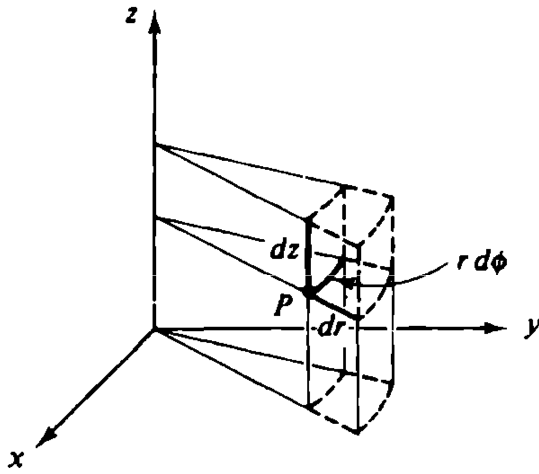
Differential Volume, Surface, and Line Elements

يوجد عدد قليل من المسائل فى الكهرومغناطيسات التى يمكن حلها بدون الرجوع إلى نوع ما من التكامل ـ على منحنى أو سـطح أو عـبر الحجـم. عنـد زيـادة الإحداثيات للنقطة P إلى $(x + dx, y + dy, z + dz)$ أو $(r + dr, \phi + d\phi, z + dz)$ أو $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ فإنه يتكون حجـم تفـاضلى dv. تقريـب الدرجـة الأولـى للحجـم التفـاضلى يصبـح صندوقـًا فـى نظـم الإحداثيـات. الحجـم التفاضلى dv فى كل نظام مبين بشكل 5-1. الزوايـا θ، ϕ ليـس لـها وحـدة أطوال لأنها تمثل زوايا.



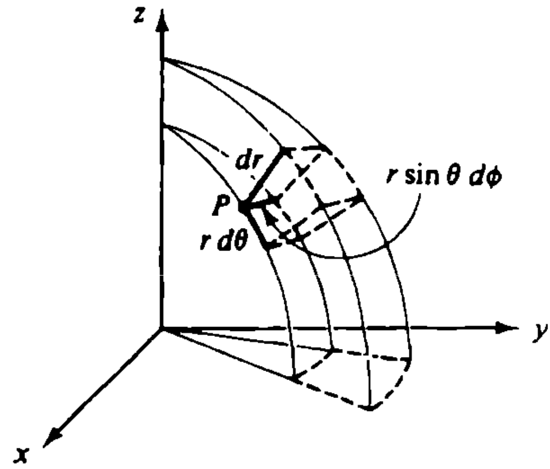
$dv = dx\, dy\, dz$

(*a*) كرتيزى



$dv = r\, dr\, d\phi\, dz$

(*b*) أسطوانى



$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

(*c*) كروى

شكل 5-1 الحجم التفاضلى لنظم الإحداثيات الثلاثة

☆ ملاحظة!

فى الإحداثيات الأسطوانية الطول التفاضلى على امتداد القوس الدائرى فى اتجاه ϕ يعطى $r\,d\phi$ [انظر شكل (b) 1-5]. فى الإحداثيات الكروية الأطوال التفاضلية على امتداد الأقواس الدائرية فى اتجاه θ و ϕ تعطى بـ $r\,d\theta$ و $r \sin\theta\, d\phi$ على الترتيب [انظر شكل (c) 1-5].

من شكل 5-1 يمكن أيضًا قراءة مساحة العناصر السطحية التى تُحِد الحجم التفاضلى. على سبيل المثال فى الإحداثيات الكروية يكون عنصر السطح التفاضلى العمودى a_r هو

$$dS = (r\,d\theta)\,(r \sin\theta\, d\phi) = r^2 \sin\theta\; d\theta\, d\phi$$

والعنصر التفاضلى الخطى dl هو القطر خلال p ولذلك.

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(كرتيزى)}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2 + dz^2 \qquad \text{(أسطوانى)}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin d\phi^2 \qquad \text{(كــروى)}$$

أشياء هامة للتذكر

- ✔ المتجه هو كمية له مقدار واتجاه.
- ✔ اتجاه المتجه يعطى بمتجه الوحدة وليس له وحدات.
- ✔ المتجهات المتعامدة تعطى ضرب مقياسى يساوى الصفر لأن الزاوية المتضمنة تساوى 90°.

✔ المتجهات المتوازية تعطى ضرب اتجــاهى يســاوى الصفــر لأن الزاويــة المتضمنة تساوى 0°.

✔ المتغيرات لنظم الإحداثيات الثلاثة هي: كرتــيزى (x, y, z)، أســطوانى (r, ϕ, z)، كروى (r, θ, ϕ).

مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 1.1

أوجد المتجه C الممتد بين $M(x_1, y_1, z_1)$ إلى $N(x_2, y_2, z_2)$ ما هو المقدار وما هو اتجاه متجه الوحدة؟

Solved Problem 1.1

Find the Vector **C** directed $M(x_1, y_1, z_1)$ to $N(x_2, y_2, z_2)$. What is its magnitude and directional unit vector?

الحل: تستخدم إحداثيات M و N لكتابة متجه الموضــع A و B بــالشكل 1-6.

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

وعلى ذلك

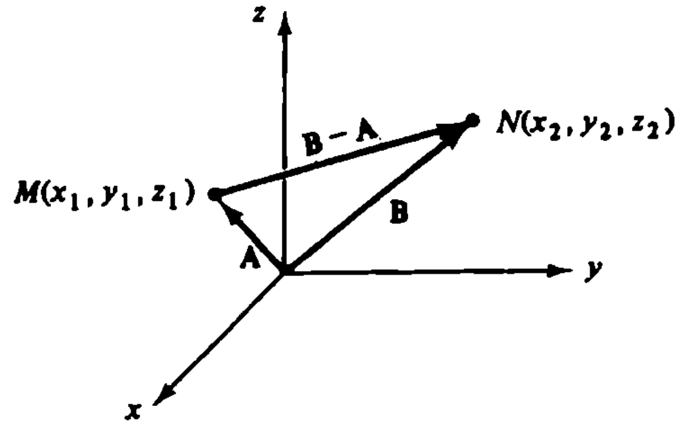
$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\,\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\,\mathbf{a}_z$$

مقدار C يكون

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه الوحدة يكون

$$\mathbf{a}_C = \frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$



شكل 6-1 متجهات الموضع لـ M و N.

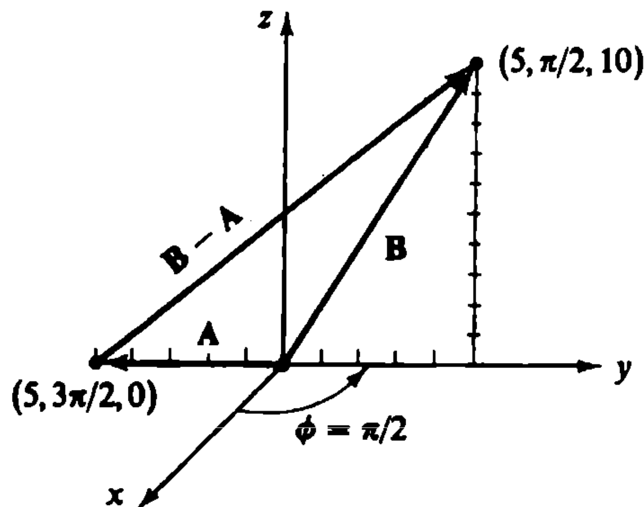
مسألة محلولة 1.2

أوجد المسافة بين (5, 3π/2 ,0) و (5, π/2 , 10) بالإحداثيات الأسطوانية.

Solved Problem 1.2

Find the distance between (5, 3π/2, 0) and (5, π/2, 10) in cylindrical coordinates.

الحل: نوجد أولاً متجهات الموضع الكرتيزية **A** و **B** (انظر شكل 7-1).



شكل 7-1 إيجاد المسافة بين النقط

من الشكل

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{a}_y \quad ، \quad \mathbf{B} = 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$$

ولذلك $\mathbf{B} - \mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ وتكون المسافة المكافئة بين النقطتين

$$|\mathbf{B} - \mathbf{A}| = 10\sqrt{2}$$

مسألة محلولة 1.3

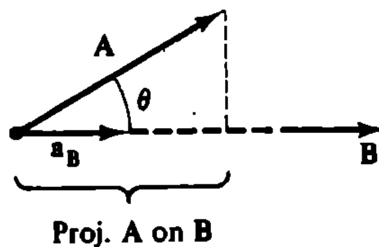
إذا كان $\mathbf{A} = (y-1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$ أوجد المتجه عند (2, 2, 1) ومسقطه على المتجه $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.

Solved Problem 1.3

Given $\mathbf{A} = (y - 1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$, find the vector at (2, 2, 1) and its projection on vector $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.

الحل: $\mathbf{A} = (2-1)\mathbf{a}_x + 2(2)\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$ كما هو مبين بالشكل 8-1. يمكن إيجاد مسقط متجه على متجه ثان عن طريق معرفة متجه الوحدة فى اتجاه المتجه الثانى وأخذ الضرب المقياسى.

$$(\text{إسقاط})\ \text{Proj. } \mathbf{A} \text{ on } \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$



شكل 8-1 مسقط A على B

وعلى ذلك يكون مسقط A على B

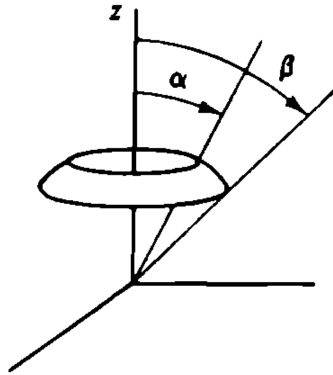
$$\text{Proj. } \mathbf{A} \text{ onto } \mathbf{B} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(1)(5) + (4)(-1) + (0)(2)}{\sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

مسألة محلولة 1.4

استخدم الإحداثيات الكروية لإيجاد مساحة الشريحة $\alpha \le \theta \le \beta$. على قشرة كروية لها نصف قطر $r = r_0$ (شكل 1-9) ما النتيجة عند $\alpha = 0$ و $\beta = \pi$.

Solved Problem 1.4

Use the spherical coordinate system to find the area of the strip $\alpha \le \theta \le \beta$ on the spherical shell of radius $r = r_0$ (Figure 1-9). What results when $\alpha = 0$ and $\beta = \pi$?



شكل 1-9 مساحة شريحة كروية

الحل: العنصر التفاضلي للمساحة هو [انظر الشكل (c) 1-5]

$$dS = r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

ولذلك

$$A = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi r_0^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$$

عندما $\alpha = 0$ و $\beta = \pi$ تكون $A = 4\pi r_0^2$. وهى مساحة الكرة الكلية.

الفصل الثانى
المجال الكهربى الساكن
Static Electric Fields

فى هذا الفصل:

- ✔ قوى كولوم وشدة المجال الكهربى
- ✔ الفيض الكهربى وقانون جاوس
- ✔ الشغل والطاقة والجهد
- ✔ التيار والمواصلات
- ✔ السعة
- ✔ مسائل محلولة

قوى كولوم وشدة المجال الكهربى
Coulomb Forces and Electric Field Intensity

قانون كولوم تم استنتاجه من شغل الأجسام الصغيرة المشحونة والتواء ميزان رقيق. ويصف القوة المبذولة بين شحنتين كهربائيتين. ويمكن التعبير عن هذا القانون باستخدام المتجهات كما يلى

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2}\,\mathbf{a}$$

حيث القوة تكون بالنيوتن (N) والمسافة d بالمتر (m) والشحنة بالكولوم (C). إنفاذية الوسط وحداتها $C^2/(Nm^2)$ أو بصيغة مكافئة فاراد لكل متر (F/m). للحيز الخالى أو الفراغ تكون الإنفاذية

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

للأوساط الأخرى، غير الحيز الخالى فإن $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$، حيث ε_r هى الإنفاذية النسبية أو ثابت العزل. يمكن افتراض أن الحيز فى جميع المسائل والأمثلة خالٍ إلا إذا كانت هناك إشارة بغير ذلك.

✓ يجب أن تعرف

للنقط المشحونة التى لها نفس الإشارة تكون قوة كولوم تنافر. وإذا كانت لهم إشارات مختلفة تكون قوة تجاذب.

ومن هذه المعلومات يمكن إعادة كتابة قانون كولوم كما يلى:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2}\mathbf{a}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^3}\mathbf{R}_{21} \qquad (1)$$

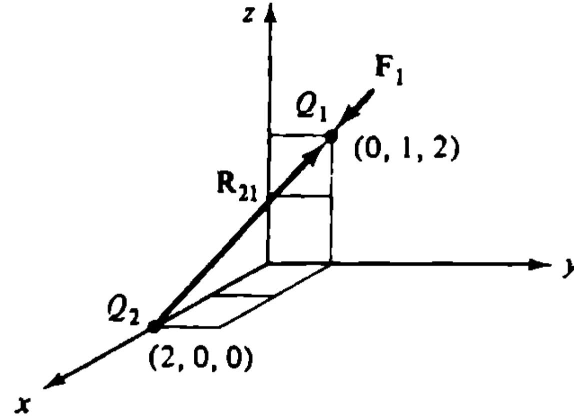
حيث $\mathbf{F}_1$ القوة على Q_1 نتيجة شحنة ثانية Q_2، $\mathbf{a}_{21}$ هو متجه الوحدة من Q_2 إلى Q_1، و $\mathbf{R}_{21} = R_{21}\,\mathbf{a}_{21}$ هو متجه الموضع من Q_2 إلى Q_1.

مثال 2.1 أوجد القوة على $Q_1 = 20\mu C$ نتيجة لشحنة $Q_2 = -300\mu C$، موقع Q_1 عند (0, 1, 2) m وموقع Q_2 عند (2, 0, 0) m.

Example 2.1 Find the force on charge Q_1, 20 μC, due to charge Q_2, −300 μC, where Q_1 is at (0,1,2) m and Q_2 is at (2,0,0) m.

الحل: بالإشارة إلى شكل 1-2، متجه الموضع يكون

$$\mathbf{R}_{21} = (x_1 - x_2)\mathbf{a}_x + (y_1 - y_2)\mathbf{a}_y + (z_1 - z_2)\mathbf{a}_z$$
$$= (0-2)\mathbf{a}_x + (1-0)\mathbf{a}_y + (2-0)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$
$$R_{21} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$



شكل 1-2 حساب القوة على Q_1

باستخدام (1)، تكون القوة

$$\mathbf{F}_1 = \frac{(20\times10^{-6})(-300\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^3}(-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$$
$$= 4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z \text{ N}$$

مقدار القوة هو 6 N واتجاهها بحيث تكون Q_1 منجذبة إلى Q_2.

هذه القوة ذات علاقة خطية مزدوجة للشحنات وعلى ذلك يمكن تطبيق نظرية التراكب وتكون القوة المؤثرة على Q_1 نتيجة لعدد $n - 1$ من الشحنات. Q_2، ... Q_n هى الجمع الاتجاهى

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2}\mathbf{a}_{21} + \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{31}^2}\mathbf{a}_{31} + \dots = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=2}^{n}\frac{Q_k}{R_{k1}^2}\mathbf{a}_{k1}$$

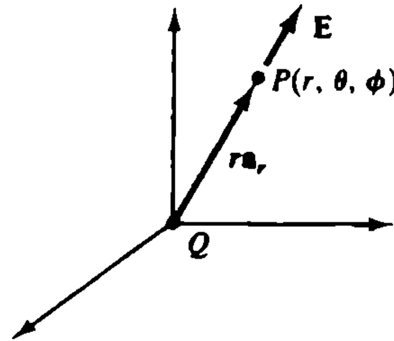
أما إذا كانت الشحنة موزعة توزيعًا مستمرًا خلال حيز ما يستبدل الجمع الاتجاهى السابق بتكامل اتجاهى. شدة المجال الكهربى نتيجة لمصدر مشحون (Q_2 أعلاه)

يعرّف بأنه القوة لوحدة الشحنة المؤثرة على شحنة اختبار (Q_1 أعلاه).

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_1/Q_1$$

وحدات **E** هى النيوتن لكل كولوم (N/C) أو المكافئ وهو الفولت لكل متر (V/m). لشحنة Q على نقطة الأصل لنظام إحداثيات كروى (شكل 2-2)، شدة المجال الكهربى عند النقطة P يكون

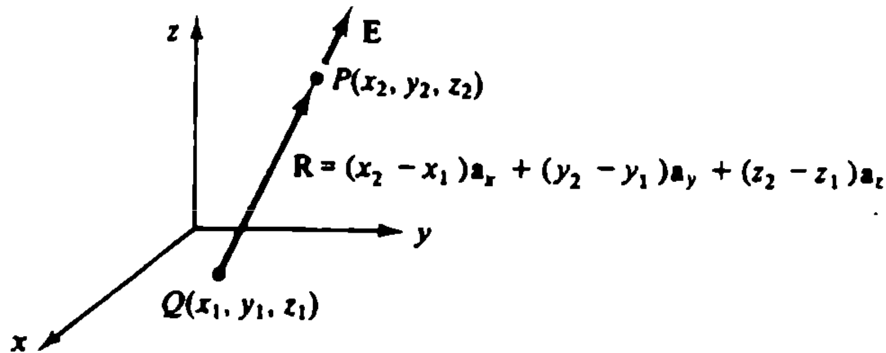
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \qquad (2)$$



شكل 2-2 شحنة Q على نقطة الأصل

إذا كانت Q فى نظام إحداثيات كرتيزية (شكل 2-3)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R \qquad (3)$$



شكل 2-3 شحنة Q على نقطة اختيارية

مثال 2.2 أوجد E عند (0, 3, 4) m بنظام كرتيزى نتيجة لنقطة مشحونة $Q = 0.5\ \mu C$ على نقطة الأصل.

Example 2.2 Find **E** at (0,3,4) m in Cartesian coordinates due to a point charge $Q = 0.5\ \mu C$ at the origin.

الحل: فى هذه الحالة

$$\mathbf{R} = (0-0)\mathbf{a}_x + (3-0)\mathbf{a}_y + (4-0)\mathbf{a}_z = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{5} = 0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$$

باستخدام (3) تكون شدة المجال الكهربى

$$\mathbf{E} = \frac{0.5 \times 10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)5^2}(0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z)$$

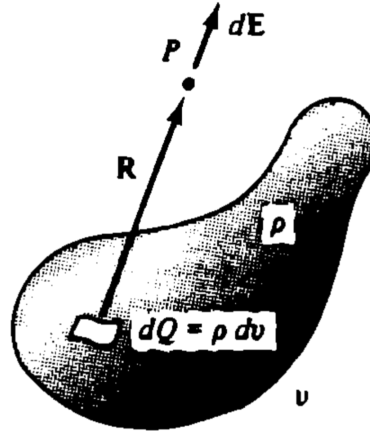
وعلى ذلك فإن $|\mathbf{E}| = 180$ V/m فى اتجاه $0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$.

عندما تكون الشحنة موزعة باستمرار خلال حجم معين أو على سطح أو خط فإن كل عنصر شحنة يضيف مجال عند النقطة الخارجية. للكثافة الحجمية للشحنة P (C/m^3) يكون عنصر الشحنة $dQ = \rho\, dv$ ويكون المجال التفاضلى عند النقطة P (شكل 4-2)

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

المجال الكلى عند نقطة الرصد P يمكن الحصول عليه عن طريق التكامل الحجمى v

$$\mathbf{E} = \int_v \frac{\rho\, \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dv \qquad (4)$$



شكل 4-2 E نتيجة لشحنة موزعة على حجم

للكثافة السطحية للشحنة ρ_s (C/m^2) يكون عنصر الشحنة $dQ = \rho_s$ والمجال التفاضلى عند النقطة P (شكل 5-2)

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

المجال الكلى عند نقطة الرصد P يمكن الحصول عليه عن طريق التكامل السطحى S

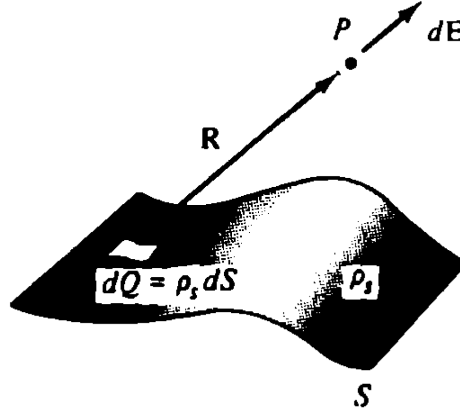
$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_s \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dS \qquad (5)$$

للكثافة الخطية للشحنة ρ_ℓ(C/m) يكون عنصر الشحنة $dQ = \rho_\ell d\ell$ والمجال التفاضلى عند النقطة P (شكل 6-2)

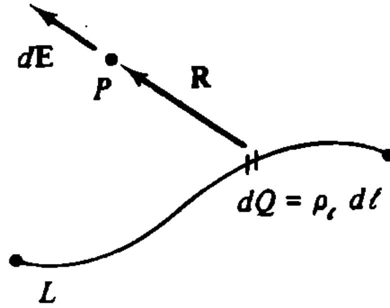
$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

المجال الكلى عند نقطة الرصد P يمكن الحصول عليه عن طريق التكامل الخطى L

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_\ell \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} d\ell \qquad (6)$$



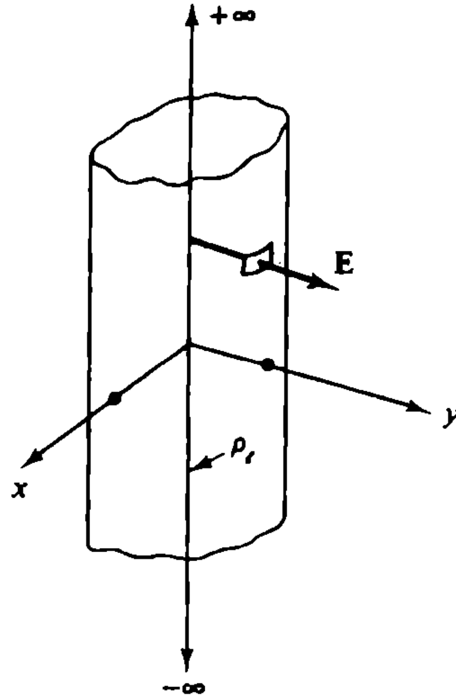
شكل 5-2 E نتيجة لشحنة موزعة على السطح



شكل 6-2 E نتيجة لشحنة موزعة على خط

توجد ثلاث حالات قياسية خاصة بشكل الشحنة هى: الشحنة النقطية، الشحنة الخطية اللانهائية، والشحنة السطحية المستوية اللانهائية من المعادلة (2) يمكن إيجاد E لشحنة موجودة عند نقطة الأصل. إذا كانت كثافة الشحنة ρ_ℓ على خط لا نهائى منتظمة التوزيع (ثابتة) على محور z فإن المجال الكهربى يمكن استنتاجه باستخدام (6) ويكون (شكل 7-2)

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r \quad \text{(إحداثيات أسطوانية)} \qquad (7)$$

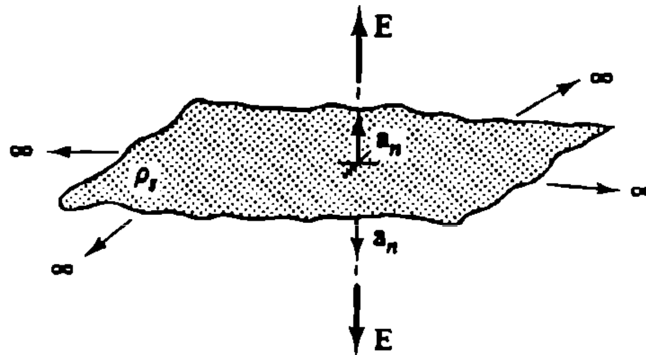


شكل 7-2 خط لا نهائى مشحون ρ_ℓ

إذا كانت كثافة الشحنة منتظمة بقيمة ρ_s على مستوى لا نهائى فـإن المجـال يعطى عن طريق (شكل 8-2)

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n \qquad (8)$$

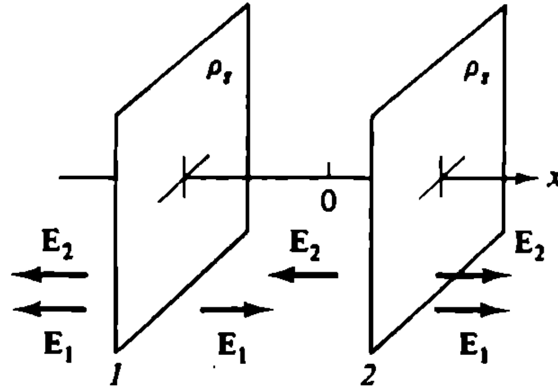
حيث $\mathbf{a}_n$ عمودى على السطح. هذا المجال ثابت المقـدار ولـه تمـاثل مـرآه حول المستوى المشحون.



شكل 8-2 سطح مستوى لا نهائى مشحون ρ_s

مثال 2.3 يوجد لوحان ممتدان إلى ما لانهاية ومشحونـان بشحنة منتظمة ρ_s على كل لوح ويقعان على $x = \pm 1$ (شكل 2-9) أوجد E فى كل المناطق

Example 2.3 Two infinite uniform sheets of charge, each with density ρ_s, are located at $x = \pm 1$ (Figure 2-9). Determine **E** in all regions.



شكل 2-9 توزيع شحنة على لوحين مستويين

الحل: شكل 2-9 يبين جزء من اللوحين المشحونين كلا اللوحين ينتج عنه مجال E فى اتجاه x ولا يعتمد على المسافة. باستخدام المعادلة (8) ونظرية التراكب

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -(\rho_s / \varepsilon_0)\mathbf{a}_x & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ (\rho_s / \varepsilon_0)\mathbf{a}_x & x > 1 \end{cases}$$

الفيض الكهربى وقانون جاوس

Electric Flux and Gauss' Law

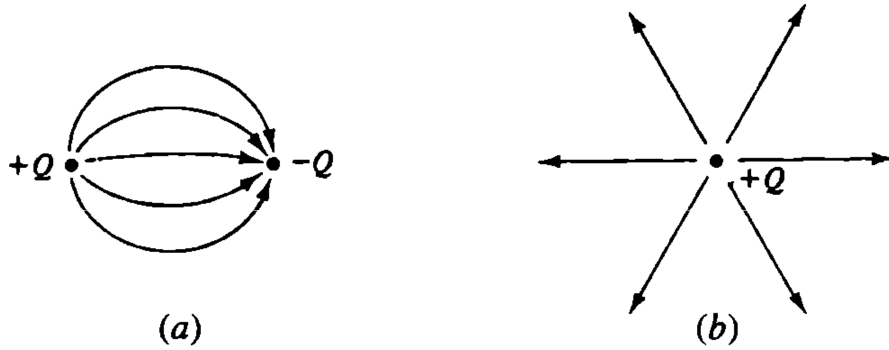
الفيض الكهربى Ψ هو مجال مقياسى وكثافته D مجال متجه. (بالتعريف) فإن الفيض الكهربى Ψ ينبعث من الشحنة الموجبة وينتهى على الشحنـة السـالبة. وفى غياب الشحنة السالبة فإن الفيض Ψ ينتهى إلى ما لا نهاية. وأيضًا بالتعريف فإن واحد كولوم من الشحنة يعطى واحد كولوم من الفيض الكهربى. إذن

$$\Psi = Q(\mathrm{C})$$

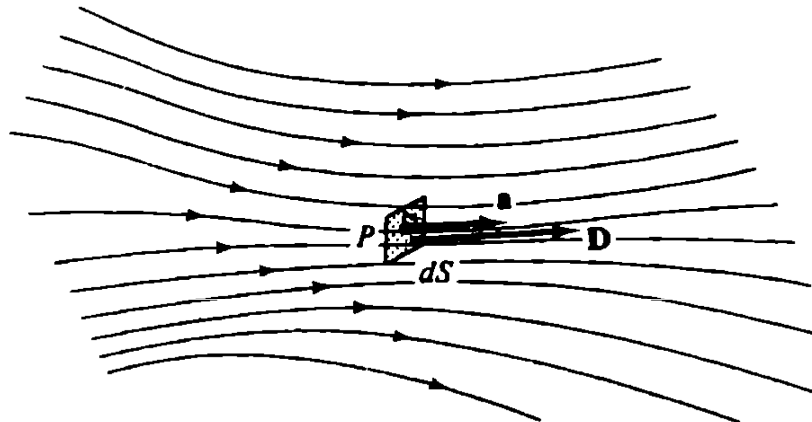
شكل (*a*) 2-10 يبين أن خطوط التدفق تترك $+Q$ وتنتهى على $-Q$. هذا على فرض أن الشحنتين لهما نفس المقدار. شكل (*b*) 2-10 يبين حالة شحنة موجبة بدون شحنة سالبة فى الفراغ. وفى هذه الحالة فإن خطوط الفيض تكون على مسافات متساوية على الزاوية المجسمة التى تحيط بالشحنة وتنتهى إلى لا نهاية.

خطوط التدفق حول النقطة P تأخذ اتجاه متجه الوحدة **a** (شكل 2-11) وإذا عبرت كمية من الفيض $d\Psi$ المساحة التفاضلية dS (التى تكون عمودية على **a**) فإن كثافة الفيض الكهربى عند النقطة P تكون

$$\mathbf{D} = \frac{d\Psi}{dS}\mathbf{a} \quad (\mathrm{C/m^2})$$



شكل 2-10 الفيض الكهربى لنقطة مشحونة



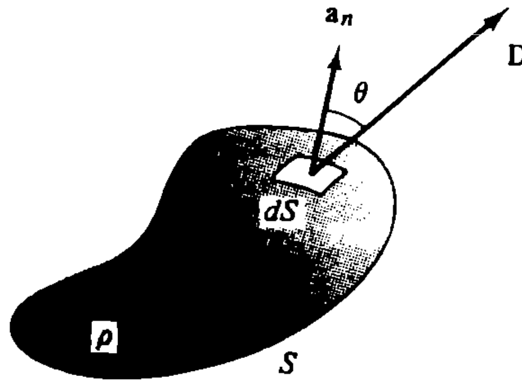
شكل 2-11 تعريف كثافة التدفق الكهربى D

شكل 12-2 يبين توزيع حجمى لشحنة كثافتها ρ (C/m^3) ويحيط بها سطح S. حيث أن كل كولوم من الشحنة Q له كولوم من الفيض وبالتالى فـإن التدفـق الفعلى الذى يعبر السطح المغلق S هو مقياس للشحنة الفعلية الداخليــة. إذا كان $\mathbf{D}$ على عنصر السطح dS يصنع زاوية θ مع متجه الوحدة العمودى، علــى السطح $\mathbf{a}_n$، فإن الفيض التفاضلى الذى يَعْبر dS يكون

$$d\Psi = D\,dS\cos\theta = \mathbf{D} \bullet dS\,\mathbf{a}_n = \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S}$$

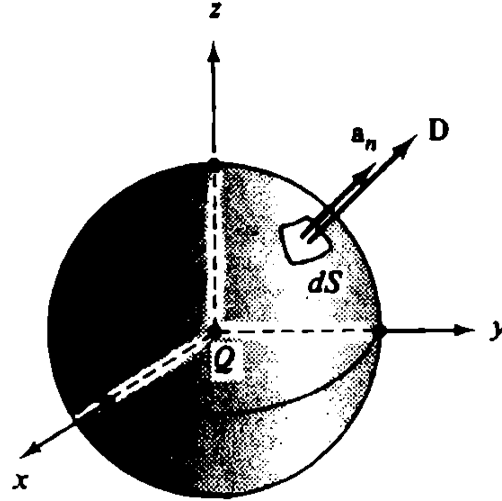
حيث $d\mathbf{S}$ تمثل متجه عنصر المساحة. ينص قـانون جـاوس علـى أن الفيـض الكلى الخارج من سطح مغلق يســاوى صـافى الشحنـة داخـل هـذا السـطح. ويعطى قانون جاوس فى الصورة التكاملية كما يلى:

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = Q_{\text{enclosed}} \qquad (9)$$



شكل 12-2 شحنة كثافتها ρ يحيط بها سطح مغلق S

تأمل الشحنة النقطية Q عند نقطة الأصل (شكل 13-2).



شكل 13-2 شحنة نقطية داخل سطح كروى مغلق

إذا أحيط بهذه الشحنة سطح كروى له نصف قطر r، إذن نتيجة للتماثل فإن **D** نتيجة لـ Q تكون ثابتة المقدار على السطح وتكون متعامدة على السطح فى كل مكان. باستخدام قانون جاوس (9) تنتج المعادلة الآتية

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = D \oint_S dS = D(4\pi r^2)$$

ومنها $D = Q/4\pi\, r^2$ وعلى ذلك

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \quad \text{(إحداثيات كروية)}$$

بمقارنة هذه بالمعادلة (2) ينتج $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. وبشكل عام لأى مجال كهربى فى حيز مُوَحد (متشابه) الخواص (خصائصه لا تتغير بتغير اتجاه المجال)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

التَشعُب للمجال الكهربى الساكن يستخدم عندما يوجد بالحيز مصادر (شحنة موجبة خالصة) أو مستقبلات (شحنة سالبة خالصة). يعرف التشعب لكثافة الفيض الكهربى عند النقطة P كما يلى

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla \bullet \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{\text{enclosed}}}{\Delta v} = \rho$$

حيث S سطح يحيط بـ Δv

هذه هى الصورة النقطية لقانون جاوس

$$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \, (\mathrm{C/m^3}) \qquad (10)$$

الصورة النقطية لقانون جاوس تعطينا وصفًا خاصًا لتوزيع شحنة المنبع.

يعرف التشعيب لمتجه عام **A** لنظم الإحداثيات الثلاثة كما يلى:

$$\text{كرتيزى} \quad \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (11)$$

$$\text{أسطوانى} \quad \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (12)$$

$$\text{كروى} \quad \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad (13)$$

مثال 2.4. إذا كان $\mathbf{D} = (-2 \times 10^{-4}/r)\mathbf{a}_r \, (\mathrm{C/m^2})$ فى الحيز $0 < r < 1$ m، وفى الحيز $r > 1$ m فإن $\mathbf{D} = (-4 \times 10^{-4}/r)\mathbf{a}_r \, (\mathrm{C/m^2})$ باستخدام الإحداثيات الكروية أوجد كثافة الشحنة فى الحيزين.

Example 2.4 In the region $0 < r < 1$ m, $\mathbf{D} = (-2 \times 10^{-4}/r)\mathbf{a}_r \, (\mathrm{C/m^2})$ and for $r > 1$ m, $\mathbf{D} = (-4 \times 10^{-4}/r^2)\mathbf{a}_r \, (\mathrm{C/m^2})$, in spherical coordinates. Find the charge density in both regions.

الحل: باستخدام (10)، (13) للحيز $0 < r < 1$ m

$$\rho = \nabla \bullet \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-2 \times 10^{-4} r) = \frac{-2 \times 10^{-4}}{r^2} \, (\mathrm{C/m^3})$$

للحيز $r > 1$ m

$$\rho = \nabla \bullet \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-4\times10^{-4}\right) = 0$$

ملاحظة!

قانون جاوس فى صورة التكامل أو فى الصورة النقطية مرتبطة بنظرية التشعب Divergence Theorem التى تعطى بالمعادلة

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \bullet \mathbf{D})\, dv = Q_{enclosed}$$

حيث S هو السطح الذى يحيط بالحجم v.

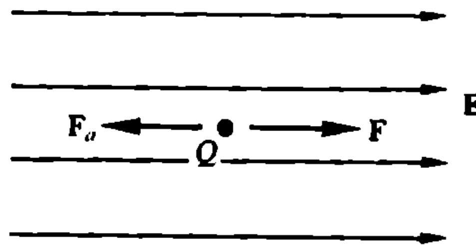
الشغل والطاقة والجهد Work, Energy, and Potential

تتعرض شحنة مقدارها Q لقوة F فى مجال كهربى E. القوة تعطى بالمعادلة

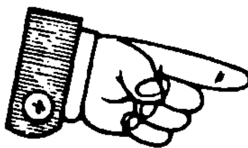
$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}\ (\mathrm{N})$$

ولكى نحافظ على توازن الشحنة فإنه يتعين التأثير بقوة خارجية $\mathbf{F}_a = -Q\mathbf{E}$ فى اتجاه معاكس (شكل 14-2)

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \qquad \mathbf{F}_a = -Q\mathbf{E}$$



شكل 14-2 القوى المؤثرة على Q



يعرف الشغل بأنه قوة تؤثر خلال مسافة. وحدات الشغل هى الجول (J).

بذلك فإن (قيمة تفاضلية) للشغل المبذول مقدارهـا dW تبـذل بواسـطة قـوة خارجية $\mathbf{F}_a$ فينتج عنها إزاحة تفاضلية للشحنة $d\mathbf{l}$. هذا يعنى تحريك الشحنة مسافة $dl = |d\mathbf{l}|$ كميًا

$$dW = \mathbf{F}_a \bullet d\mathbf{l} = -Q\mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}$$

يلاحظ أنه عندما تكون Q موجبة و $d\mathbf{l}$ فى اتجاه $\mathbf{E}$ فإن $dW = -QE\, dl < 0$ وفى ذلك إشارة إلى أن الشغل قد بـذل بواسـطة المجـال الكـهربى. مـن الناحيـة الأخرى، إذا كان dW موجبًا فإن ذلك يشير إلـى أن الشغـل المبـذول ضـد المجال الكهربى. صور مركبات متجه عنصر الإزاحة كالآتى:

(كرتيزية) $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$

(أسطوانية) $d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + r\,d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$

(كـــروية) $d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + r\,d\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\mathbf{a}_\phi$

مثال 2.5 مجال كهربى ساكن معطى كالآتى

$$\mathbf{E} = (x/2 + 2y)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

أوجد الشغل المبذول فى تحريـك شحنـة نقطيـة $Q = -20\ \mu\text{C}$ (a) مـن نقطـة الأصل إلى $(4, 0, 0)$ m و(b) من النقطة $(4, 0, 0)$ m إلى النقطة $(4, 2, 0)$ m.

Example 2.5 An electrostatic field is given by

$$\mathbf{E} = (x/2 + 2y)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

Find the work done in moving a point charge $Q = -20\ \mu\text{C}$ (a) from the origin to (4,0,0) m, and (b) from (4,0,0) m to (4,2,0) m.

الحل: (a) المسار الأول عبر محور x لذلك $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x$.

$$dW = -Q\mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = (20 \times 10^{-6})\left(\frac{x}{2} + 2y\right)dx$$

$$W = (20 \times 10^{-6})\int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y\right)dx\Big|_{y=0} = 80\ \mu\text{J}$$

(b) المسار الثانى فى اتجاه $\mathbf{a}_y$ ولذلك $d\mathbf{l} = dy\mathbf{a}_y$.

$$W = (20\times10^{-6})\int_0^2 2x\,dy\,|_{x=4} = 320\ \mu\text{J}$$

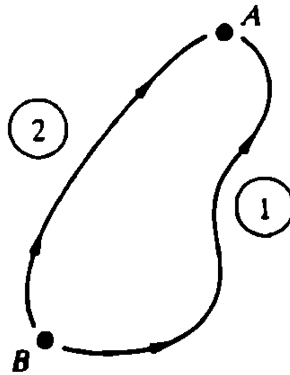
الشغل المبذول فى تحريك شحنة نقطية من مكان A إلى مكان آخر B فى مجال كهربى ساكن لا يعتمد على المسار المتبع. وعلى ذلك وبناء على شكل 2-15

$$\int_{①}\mathbf{E}\bullet d\mathbf{l} = -\int_{②}\mathbf{E}\bullet d\mathbf{l} \quad \text{or} \quad \oint_{①-②}\mathbf{E}\bullet d\mathbf{l} = 0$$

حيث التكامل الأخير على مسار مغلق ومكون من المسار ① وقد اعتبر موجبًا والمسار ② اعتبر سالبًا.

✓ يجب أن تعرف

للمجال الكهربى الساكن يكون التكامل المغلق دائمًا مساوى الصفر بغض النظر عن المسار وعلى ذلك يطلق على المجال الكهربى الساكن مجال محافظ.



شكل 2-15 مساران محتملان للتكامل

مثال 2.6 للمجال **E** فى مثال 2.5 أوجد الشغل المبذول لتحريك نفس الشحنة من (4, 2, 0) رجوعًا إلى (0, 0, 0) عبر مسار خط مستقيم.

Example 2.6 For the **E** field of Example 2.5, find the work done in moving the same charge from (4,2,0) back to (0,0,0) along a straight-line path.

الحل: تكامل الشغل ينقسم إلى تكاملين فى x و y.

$$W = (20\times10^{-6})\int_{(4,2,0)}^{(0,0,0)}\left[\left(\frac{x}{2}+2y\right)\mathbf{a}_x + 2x\,\mathbf{a}_y\right]\bullet(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y)$$

$$W = (20\times10^{-6})\int_4^0\left(\frac{x}{2}+2y\right)dx + (20\times10^{-6})\int_2^0 2x\,dy$$

ولكن على المسار $y = x/2$ وبالتعويض فى التكامل يعطى

$$W = (20\times10^{-6})\int_4^0\frac{3}{2}x\,dx + (20\times10^{-6})\int_2^0 4y\,dy = -400\ \mu\text{J}$$

من المثال 2.5 نلاحظ أن شغل مقداره $400\mu J = 320 + 80$ تم بذله ضد المجال، وعلى مسار قائم الزاوية خارجى وذلك بالتمام نفس الشغل الذى تم إرجاعه بواسطة المجال على مسار خط مستقيم داخلى وبذلك يكون الشغل الكلى صفر (مجال محافظ).

جهد النقطة A بالنسبة للنقطة B (يكتب V_{AB}) يُعرَّف على أنه الشغل المبذول لتحريك وحدة الشحنة الموجبة من B إلى A. لشحنة موجبة Q_u فإن

$$V_{AB} = \frac{W}{Q_u} = -\int_B^A \mathbf{E}\bullet d\mathbf{l}\quad(\text{J/C or V}) \tag{14}$$

حيث أن المجال **E** محافظ $V_{AB} = V_{AC} - V_{BC}$ وعلى هذا فإن V_{AB} يمكن اعتبارها فرق الجهد بين A، B. عندما تكون V_{AB} موجبة معنى ذلك أنه يجب

بذل شغل لتحريك وحدة الشحنة من B حتى A ويقال أن جهد A أعلى من B.

حيث أن المجال الناشئ عن شحنة نقطية موجودة عند نقطة الأصل فى اتجاه نصف قطر المعادلة (2) فإن

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_A}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

إذا كانت الشحنة Q موجبة فـإن جهد A أعلى مـن B عندما $r_A < r_B$. إذا اعتبرنا النقطة B نقطة الإسناد وتحركت إلى ما لا نهاية.

$$V_{A\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{\infty}\right)$$

أو

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



تــذكــر!

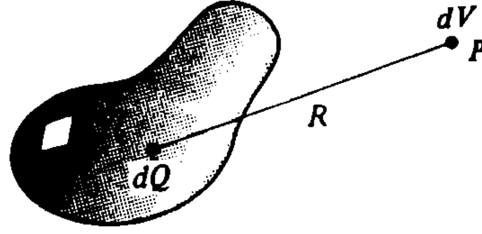
V هـى الجهد المطلق نتيجة لـ Q عندما يكون الإسناد فى ما لا نهاية.

إذا وزعت شحنة خلال حجم محدود وكانت كثافة الشحنة ρ (C/m^3) فيكـون الجهد التفاضلى عند النقطة P (شكل 16-2) هو

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

يمكن الحصول على الجهد الكلى عند النقطة P عن طريق التكامل

$$V = \int_{\text{volume}} \frac{\rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

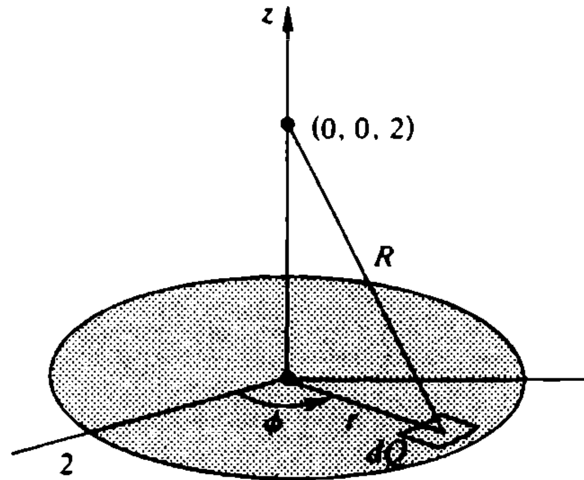


شكل 2-16 الجهد نتيجة لشحنة حجمية

مثال 2.7 شحنة كلية مقدارها 40/3 نانوكولوم موزعة توزيعًا منتظمًا على شكل قرص دائرى نصف قطره 2 m. أوجد الجهد نتيجة لهذه الشحنة عند المحور وعلى مسافة 2 m من القرص.

Example 2.7 A total charge of 40/3 nano coulomb is uniformly distributed in the form of a circular disk of radius 2 m. Find the potential due to this charge at a point on the axis, 2 m from the disk.

الحل: من شكل 17-2 يمكن إيجاد الجهد باستخدام نظام الإحداثيات الأسطوانية.



شكل 2-17 قرص دائرى سطحى من الشحنة

لتوزيع منتظم للشحنة

$$\rho_s = \frac{Q}{Area} = \frac{40/3 \times 10^{-9}}{4\pi} = \frac{10^{-8}}{3\pi} \quad (\text{C/m}^2)$$

المسافة R تعطى كالآتى

$$R = \sqrt{4 + r^2} \quad \text{(m)}$$

تكامل الجهد على السطح يكون

$$V = \int_S \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{30}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \frac{r\, dr\, d\phi}{\sqrt{4 + r^2}} = 49.7 \text{ V}$$

المجال الكهربى والجهد مرتبطان معًا بواسطة التكامل (14). والعلاقة التفاضلية يمكن استنتاجها ومنها يمكن إيجاد **E** من جهد معلوم V.

المجال الكهربى والجهد أيضًا مرتبطان عن طريق

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

حيث ∇V هو تدرج Gradient الجهد V لنظم الإحداثيات يعرف التدرج كما يلى

(كرتيزية) $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

(أسطوانية) $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{\partial V}{r\,\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

(كروية) $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{\partial V}{r\,\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{\partial V}{r \sin\theta\, \partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

مثال 2.8 فى حالة الإحداثيات الكروية فقد تم إيضاح أنه لشحنة Q فإن الجهد $V = Q/4\pi\varepsilon_0 r$. باستخدام التدرج الكروى

Example 2.8 In spherical coordinates, it was shown that for a charge Q the potential is $V = Q/4\pi\varepsilon_0 r$. Using the spherical gradient,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

وهو نفس التعبير بالمعادلة (2).

التيار والموصلات Current and Conductors

التيار الكهربى هو معدل انتقال الشحنة الكهربية عبر نقطة معينة أو عبر سطح معين. فى الدوائر يستخدم الرمز I عمومًا فى حالة التيار الثابت ويستخدم الرمز i فى حالة التيار المتغير مع الزمن.

☆ ملاحظة!

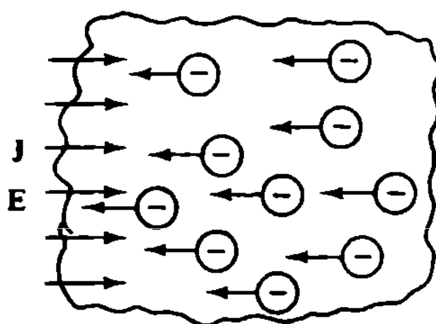
وحدة التيار هى أمبير $1\ A = 1\ C/s$.

لكثافة التيار التوصيلى **J** أهمية خاصة. **الموصل** هو مادة له عدد كبير متاح من إلكترونات التوصيل الحرة. يتم التيار التوصيلى عندما يؤثر المجال الكهربى بقوة على الإلكترونات الحرة ويتسبب عن هذا تدفق منتظم للشحنة خلال المادة الموصلة. التوصيلية σ لها علاقة بسهولة الحركة لإلكترونات التوصيل داخل المادة. وحدات التوصيلية σ هى السيمنز (S).

العلاقة بين المجال الكهربى والتيار التوصيلى يعطى بالمعادلة (شكل 18-2)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}\ (A/m^2)$$

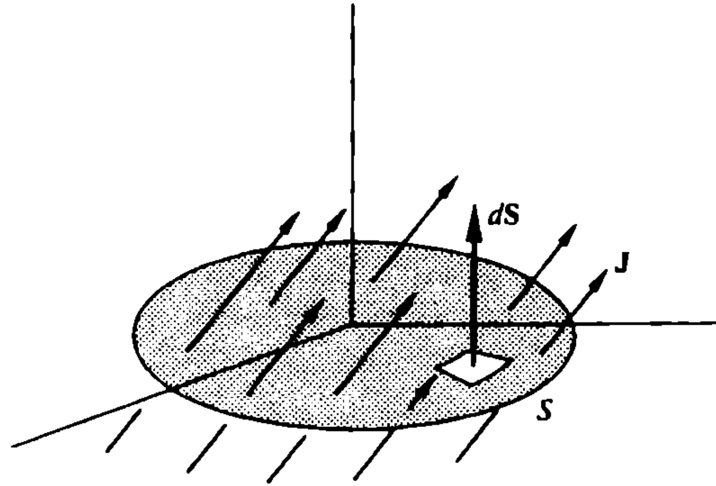
هذه المعادلة يشار إليها بأنها قانون أوم Ohm's Law فى صورة نقطية.



شكل 18-2 تدفق التيار فى موصل

حيث كثافة التيار **J** تخترق السطح S (مثل مساحة مقطع سلك التوصيل)، يمكن الحصول على التيار I عن طريق تكامل الضرب المقياسى لـ **J** مع متجه المساحة التفاضلى $d\mathbf{S}$ (شكل 2-19)

$$dI = \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S} \qquad I = \int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S}$$



شكل 2-19 تدفق J خلال السطح S

مثال 2.9 أوجد التيار فى السلك الدائرى المبين بشكل 2-20 إذا كانت كثافة التيار $\mathbf{J} = 15\,(1 - e^{-1000r})\mathbf{a}_z\ (\mathrm{A/m^2})$. ونصف قطر السلك 2 mm.

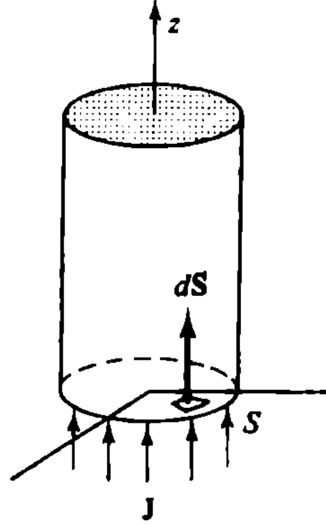
Example 2.9 Find the current in the circular wire shown in Figure 2-20 if the current density is $\mathbf{J} = 15\,(1-e^{-1000r})\,\mathbf{a}_z\ (\mathrm{A/m^2})$. The radius of the wire is 2 mm.

الحل: S تمثل مساحة السلك ونظام الإحداثيات الأسطوانية سوف يستخدم. التيار التفاضلى يكون

$$dI = \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S} = 15(1 - e^{-1000r})\mathbf{a}_z \bullet r\,dr\,d\phi\,\mathbf{a}_z$$

و

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.002} 15(1 - e^{-1000r})r\,dr\,d\phi = 1.33 \times 10^{-4}\ \mathrm{A} = 0.133\ \mathrm{mA}$$



شكل 20-2 التيار المار خلال سلك

إذا كان الموصل له مساحة مقطع منتظمة A وطوله ℓ كما فى شكل 21-2 فإن فرق الجهد V بين النهايتين

$$E = \frac{V}{\ell}, \qquad J = \frac{\sigma V}{\ell}$$

بفرض أن التيار منتظم على مساحة المقطع A فإن التيار الكلى

$$I = JA = \frac{\sigma A V}{\ell}$$

حيث أن قانون أوم ينص على أن $V = IR$ فتعرف المقاومة لسلك كالآتى

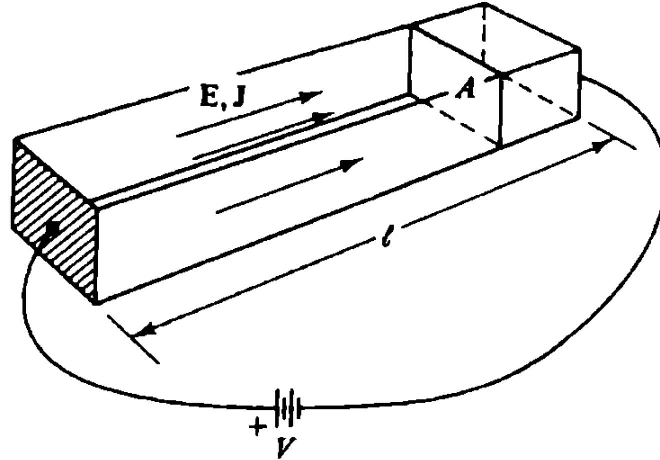
$$R = \frac{\ell}{\sigma A} \quad (\text{ohms}, \Omega)$$

يرتبط الأوم بالسيمنز بواسطة $1\ \Omega = 1\ S^{-1}$.

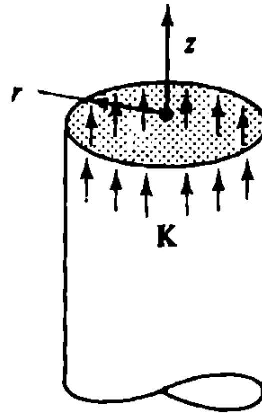
فى بعض الأحيان وخاصة عند الترددات العالية يكون التيار متاخم (ملازم) لسطح الموصل. من أجل كثافة التيار السطحى يكون من المفيد تعريف متجه الكثافة **K** والذى يعطى معدل انتقال الشحنة لوحدة الأطول (A/m). شكل 22-2 يبين التيار الكلى المار على سطح أسطوانة نصف قطرها r

فى اتجاه z فى هذه الحالة، I يكون منتظم التوزيع على محيط السطح ويعطى كثافة تيار سطحية بواسطة

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_z$$



شكل 21-2 حساب مقاومة موصل



شكل 22-2 كثافة التيار السطحى K على أسطوانة

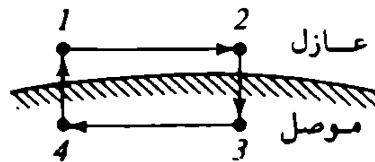
السعة Capacitance

السعة هى قابلية جسم لتخزين الشحنة الكهربية. المكثفات هى عناصر لتخزين الطاقة فى الدوائر. لحساب السعة لا بد أولاً من تعريف شروط الحد الفاصل بين مادة موصلة ومادة عازلة.

> الوسط غير الموصل ينظر إليه عادة على أنه مادة عازلة.

فى حالة المجال الساكن كل الشحنة الفعالة تكون على السطح الخارجى للموصل ويكون كل من E و D مساويًا للصفر داخل المادة الموصلة باستخدام خاصية أن المجال الثابت محافظ ينتج (شكل 23-2)

$$\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = 0$$



شكل 23-2 مسار التكامل عند الحد الفاصل بين موصل وعازل

إذا كان التكامل على المساران من 2 إلى 3 ومن 4 إلى 1 مساويان للصفر وذلك للحصول على الشروط عند الحد الفاصل، وعلى ذلك يكون التكامل الثانى والرابع معًا مساويان للصفر. إن المسار من 3 إلى 4 داخل الموصل حيث E مساويًا للصفر وذلك يؤدى إلى

$$\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \int_1^2 E_t \, dl = 0$$

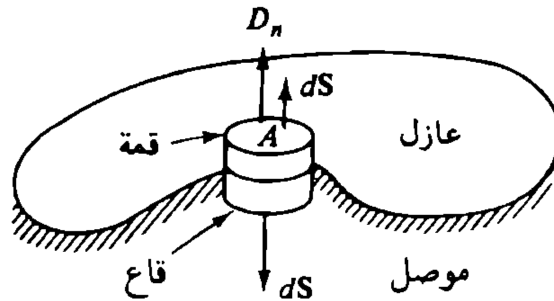
حيث E_t هى القيمة المماسية لـ E على السطح العازل.

ملاحظة!

القيمة المماسية لـ E و D تساوى صفراً عند الحد الفاصل بين موصل وعازل

$$E_t = D_t = 0$$

لإيجاد الشروط المركبة العمودية، افرض أن هناك أسطوانة مغلقة دائرية قائمة صغيرة وضعت متعامدة على الحد الفاصل كما هو مبين بالشكل 24-2.



شكل 24-2 إيجاد مركبة المجال العمودية عند الحد الفاصل بين موصل وعازل

بتطبيق قانون جاوس على هذا السطح

$$\oint \mathbf{D} \bullet d\mathbf{s} = Q_{enc} = \int_{\text{قمة}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{s} + \int_{\text{قاع}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{s} + \int_{\text{جانب}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{s} = \int_A \rho_s \, dS$$

التكامل على سطح الجانب يساوى الصفر إذا كان ارتفاع الأسطوانة يقترب من الصفر. التكامل على سطح القاع يساوى الصفر حيث أن D داخل الموصل. هذا يترك (يؤدى)

$$\int_{\text{قمة}} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{s} = \int_A D_n dS = \int_A \rho_s dS$$

حيث D_n المركبة العمودية لـ D فى العازل عند الحد الفاصل. هذا يتحقق فقط إذا كان

$$D_n = \rho_s \qquad \text{and} \qquad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

حيث ε هى الإنفاذية للعازل لذلك مركبة **D** العمودية تنتهى بشحنة سطحية ρ_s عند الحد الفاصل بين الموصل والعازل.

المواد العازلة تصبح مستقطبة بتأثير المجال الكهربى وينشأ عن هذا كثافة تدفق **D** يكون أعلى من مثيله فى حالة الحيز الخالى. تأثير الاستقطاب بسبب نظام الربط لأزواج من الشحنة السالبة والموجبة خلال العازل يعرف بعزم ثنائى القطبية. هذا يزيد من كثافة الفيض نتيجة للاستقطاب وهذا يحدث فى المواد الخطية والموحدة الخواص عن طريق تعريف السماحية ε للمادة وربط **E** و **D** بواسطة

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

الإنفاذية ε تتناسب مع الإنفاذية للحيز الخالى عن طريق

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

حيث ε_r الإنفاذية النسبية أو ثابت العزل للمادة. لمعظم المواد العازلة $\varepsilon_r > 1$.

المواد الغير موصلة تستخدم كمواد عازلة فى المكثفات أى جسمين موصلين يفصل بينهما مادة عازلة أو حيز خالٍ يكون هناك سعة بينهما. فرق الجهد المؤثر يسبب وجود شحنة $+Q$ على إحدى الموصلات و $-Q$ على الموصل الآخر.

النسبة بين مقدار القيمة المطلقة للشحنة إلى القيمة المطلقة لفرق الجهد تعرف بأنها السعة للنظام وتعطى

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\mathrm{F})$$

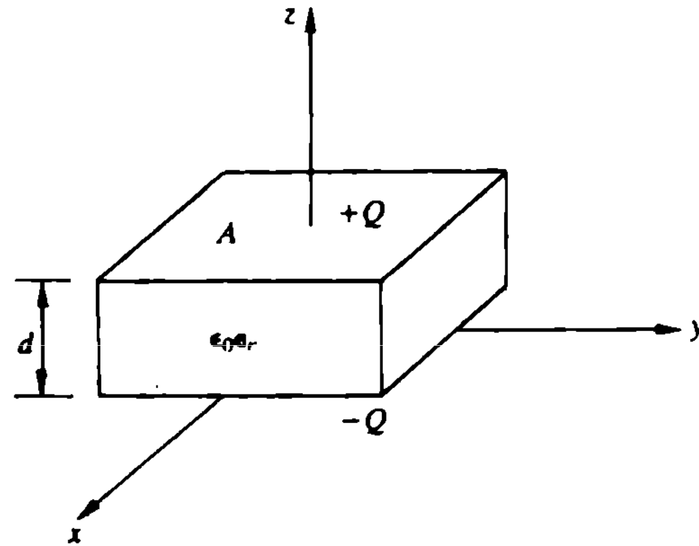
وحدة السعة هى فاراد (F).

$$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C/V}$$

السعة تعتمد على الشكل الهندسى للنظام وعلى خــواص العـازل أو العـوازل المستخدمة.

مثال 2.10 أوجد سعة اللوحين المتوازيين بشكل 25-2 أهمـل التـهدب (أى، أفرض أن المجال منتظم التوزيع بيـن اللوحيـن وأن الشحنـة علـى اللوحيـن منتظمة التوزيع).

Example 2.10 Find the capacitance of the parallel plates in Figure 2-25, neglecting fringing (i.e., assume the field is uniformly distributed between the plates and the charge is uniformly distributed on the plates).



شكل 25-2 مكثف ذو لوحين متوازين

الحل: بفرض أن الشحنة على اللوح العلوى $+Q$ والشحنة على اللوح السفلى $-Q$. ويفرض أن توزيع الشحنة منتظم على اللوح العلوى

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

وتكون كثافة الشحنة على اللوح السفلى $-\rho_s$. يكون **D** منتظمًا ومتجـهًا مـن $+\rho_s$ إلى $-\rho_s$.

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{A}(-\mathbf{a}_z) \quad \text{and} \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}(-\mathbf{a}_z)$$

جهد اللوح العلوى بالنسبة للوح السفلى يمكن إيجاده عن طريق التكامل [باستخدام (14)].

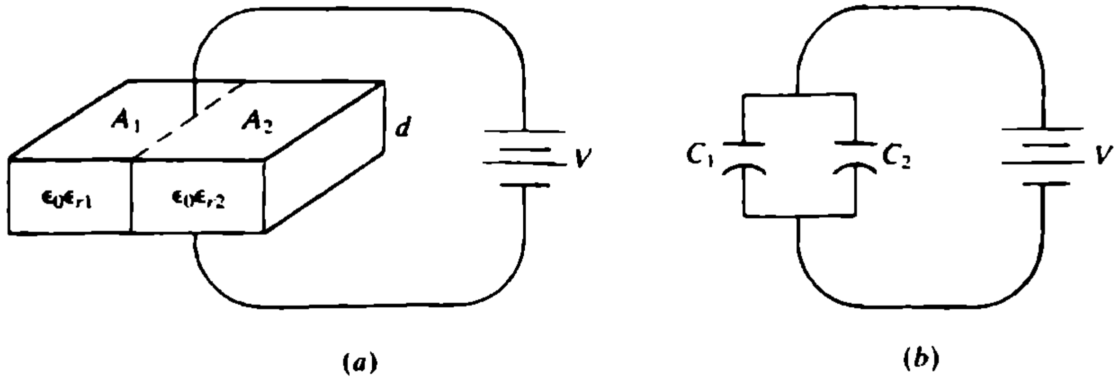
$$V = -\int_0^d \left[\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}(-\mathbf{a}_z) \right] \bullet (dz\, \mathbf{a}_z) = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

على ذلك $C = Q/V = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$. ويلاحظ أن النتيجة تعتمد فقط على الشكل الهندسى وإنفاذية المادة وليس على الشحنة أو الجهد.

عندما يوجد عازلان بالمكثف ويكون الحد البينى الفاصل بينهما موازيًا لـ **E** و **D** كما هو مبين بشكل (*a*) 2-26 يمكن إيجاد السعة المكافئة عن طريق معاملة النظام كمكثفين على التوازى [شكل (*b*) 2-26].

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A_1}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A_2}{d}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r1} A_1 + \varepsilon_{r2} A_2) \qquad (15)$$

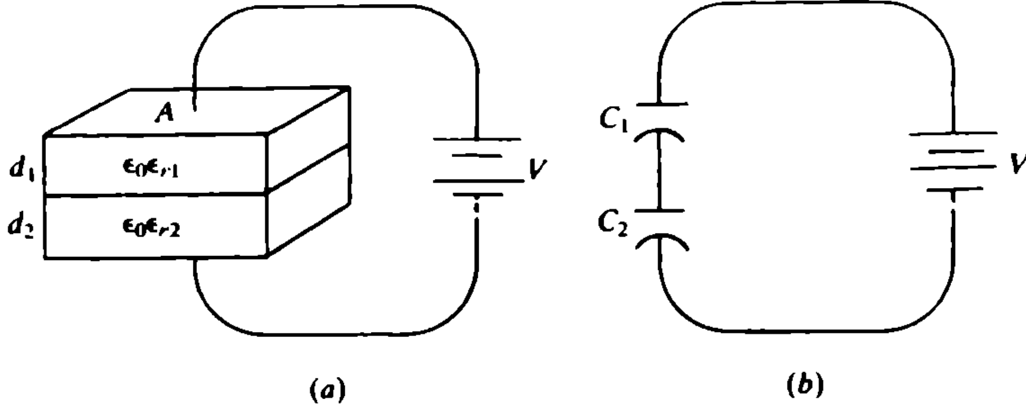


شكل 2-26 تركيب مكثف التوازى

عندما يكون الحد البينى للعازلين عموديًا على **D** و **E** كما هو بشكل (*a*) 2-27 فإن السعة المكافئة توجد عن طريق اعتبار أن المكثفين على التوالى [شكل (*b*) 2-27].

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A}{d_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} A} \qquad (16)$$



شكل 27-2 تركيب مكثف التوالى

يمكن أن تمتد النتيجة لأى عدد من العوازل بحيث تكون جميع الأسطح البينية عمودية على D و E. معكوس السعة المكافئة هو معكوس السعات منفردة.

مثال 2.11 مكثف متوازى اللوحين بمساحة $0.30\ m^2$ وفاصل 5.5 mm يحتوى على ثلاثة عوازل والأسطح البينية متعامدة على E و D كما يلى: $\varepsilon_{r1} = 3.0$، $d_1 = 1.0$ mm، $\varepsilon_{r2} = 4.0$، $d_2 = 2.0$ mm، $\varepsilon_{r3} = 6.0$، $d_3 = 2.5$ mm. أوجد السعة.

Example 2.11 A parallel plate capacitor with area $0.30\ m^2$ and separation 5.5 mm contains three dielectrics with interfaces normal to **E** and **D**, as follows: $\varepsilon_{r1} = 3.0$, $d_1 = 1.0$ mm; $\varepsilon_{r2} = 4.0$, $d_2 = 2.0$ mm; $\varepsilon_{r3} = 6.0$, $d_3 = 2.5$ mm. Find the capacitance.

الحل: يعامل كل عازل على أنه مكثف واحد فى مجموعة مكونة من ثلاثة مكثفات على التوالى.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 (3.0)(0.30)}{10^{-3}} = 7.96\ \text{nF}$$

بالمثل $C_2 = 5.31$ nF، $C_3 = 6.37$ nF. باستخدام (16)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{7.96 \times 10^{-9}} + \frac{1}{5.31 \times 10^{-9}} + \frac{1}{6.37 \times 10^{-9}} \quad \text{or} \quad C_{eq} = 2.12\ \text{nF}$$

أشياء هامة للتذكر

- ✔ الشحنات المتشابهة تتنافر والشحنات المتضادة تتجاذب.
- ✔ **E** لشحنة نقطية فى نقطة الأصل يكون فى اتجاه نصف القطر.
- ✔ لحيز موحد الخواص $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$.
- ✔ العلاقة بين **E** و V هى $E = -\nabla V$ وأيضًا بالمعادلة (14).
- ✔ كثافة تيار التوصيل $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.
- ✔ السعة للمكثف متوازى اللوحين كما يلى $C = Q/V = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$.

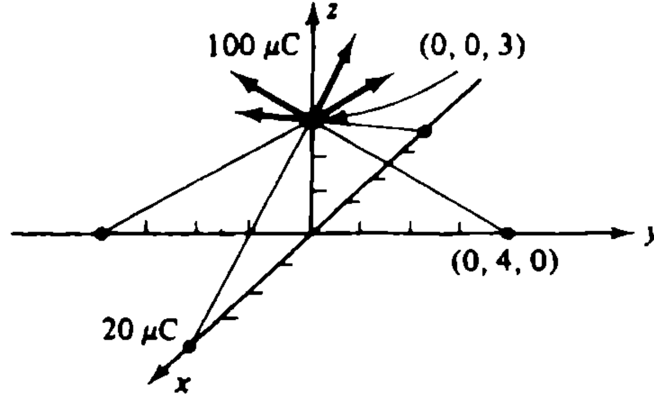
Solved Problems مسائل محلولة

مسألة محلولة 2.1

بالإشارة إلى شكل 28-2. أوجد القوة على الشحنة 100 μC عند (0, 0, 3) m إذا وجدت أربع شحنات متساوية بقيمة 20 μC على المحور x و y عند ±4 m.

Solved Problem 2.1

Refer to Figure 2-28. Find the force on a 100 μC charge at (0,0,3) m if four like charges of 20 μC are located on the x and y axes at ±4 m.



شكل 2-28 جمع القوى التى تؤثر على شحنة مقدارها 100 μC

الحل: اعتبر القوة نتيجة لشحنة عند $y = 4$ m

$$\frac{(10^{-4})(20\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2}\left(\frac{-4\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z}{5}\right)$$

مركبة y سوف تتلاشى عن طريق الشحنة عند $y = -4$ m. أيضًا مركبة x لبقية الشحنات سوف تتلاشى. وعلى ذلك

$$\mathbf{F} = 4\left(\frac{18}{25}\right)\left(\frac{3}{5}\mathbf{a}_z\right) = 1.73\mathbf{a}_z \text{ N}$$

مسالة محلولة 2.2

أوجد **E** عند (0, 0, 5) m نتيجة لـ $Q_1 = 0.35\,\mu$C عند (0, 4, 0) m و $Q_2 = 0.55\,\mu$C عند (3, 0, 0) m (انظر شكل 2-29).

Solved Problem 2.2

Find **E** at (0,0,5) m due to $Q_1 = 0.35$ μC at (0,4,0) m and $Q_2 = -0.55$ μC at (3,0,0) m (see Figure 2-29).

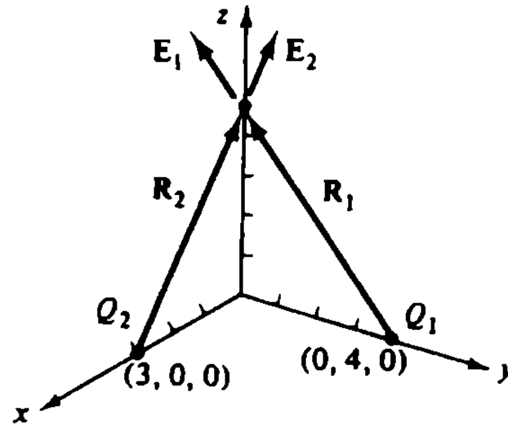
الحل: متجهات المسافة هى

$$\mathbf{R}_1 = -4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z, |\mathbf{R}_1| = \sqrt{41} \text{ m}$$

$$\mathbf{R}_2 = -3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z, |\mathbf{R}_2| = \sqrt{34} \text{ m}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{0.35\times10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(41)}\left(\frac{-4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{41}}\right)$$

$$= -48.0\mathbf{a}_y + 60.0\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$



شكل 2-29 حساب E **عند** (0, 0, 5) m.

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-0.55\times10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(34)}\left(\frac{-3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{34}}\right)$$

$$= 74.9\mathbf{a}_x - 124.9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

المجال الكلى عند (0, 0, 5) m يكون

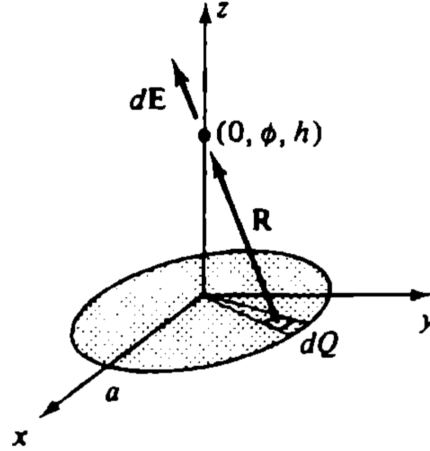
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 74.9\mathbf{a}_x - 48\mathbf{a}_y - 64.9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

مسألة محلولة 2.3

أوجد شدة المجال الكهربى E عند $(0, \phi, h)$ لقرص مشحون بانتظام. ρ_s = ثابت و $r \le a$ و $z = 0$ (انظر شكل 2-30).

Solved Problem 2.3

Find the electric field intensity **E** at $(0,\phi,h)$ due to the uniformly charged disk $\rho_s = const.$, $r \le a$, $z = 0$ (see Figure 2-30).



شكل 2-30 E عند $(0, \phi, h)$ **نتيجة لقرص منتظم الشحنة**

العنصر التفاضلى لـ E نتيجة للعنصر التفاضلى لـ ρ_s هو

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s r\,dr\,d\phi}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

المركبة فى اتجاه نصف القطر تتلاشى نظرًا للتماثل. لذلك

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{r\,dr\,d\phi}{(r^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{1}{h}\right)\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

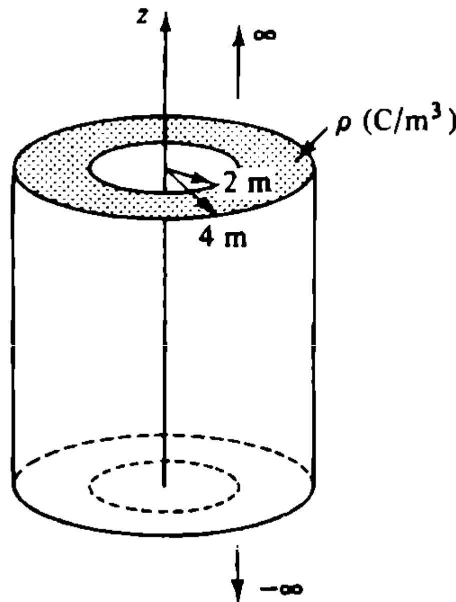
يلاحظ أنه عندما $a \to \infty$ فإن $\mathbf{E} \to (\rho_s / 2\varepsilon_0)\,\mathbf{a}_z$ V/m. وهو المجال نتيجة لسطح لا نهائى منتظم الشحنة.

مسألة محلولة 2.4

الحجم بالإحداثيات الأسطوانية بين $r = 2$ m و $r = 4$ m يحتوى على شحنة كثافتها ρ (C/m^3) (شكل 2-31). استخدم قانون جاوس لإيجاد **D** فى كل المناطق.

Solved Problem 2.4

The volume in cylindrical coordinates between $r = 2$ m and $r = 4$ m contains a uniform density ρ (C/m^3) (Figure 2-31). Use Gauss' law to find **D** in all regions.



شكل 2-31 شحنة كثافتها ρ(C/m^3) بحجم اسطوانى

الحل: حيث أن ρ ليست دالة فى ϕ أو z فإن Ψ تكون بالكامل فى اتجاه نصف القطر. الحقيقة الثانية أن **D** ثابت فى المقدار إذا كانت r ثابتة. على ذلك يكون الاختيار المناسب لسطح جاوس هو سطح أسطوانة دائرية قائمة مغلقة. التكامل السطحى (9) على سطحى النهايتين يساوى الصفر حيث أن الفيض يخرج من السطح الجانبى الدائرى. لطول مقداره L

$$\oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = D(2\pi rL) = Q_{enc}$$

من شكل 2-31 ولقيم $0 < r < 2$ m

$$Q_{enc} = 0 = D(2\pi rL)$$
$$\Rightarrow \mathbf{D} = 0$$

لقيم $2 \le r \le 4$ m

$$Q_{enc} = \pi\rho L(r^2 - 4) = D(2\pi rL)$$
$$\Rightarrow \mathbf{D} = \frac{\rho}{2r}(r^2 - 4)\,\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$$

لقيم $r \ge 4$ m

$$Q_{enc} = \pi\rho L(16 - 4) = D(2\pi rL)$$
$$\Rightarrow \mathbf{D} = \frac{6\rho}{r}\,\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$$

مسألة محلولة 2.5

أوجد السعة لمكثف أسطوانى طوله L، حيث نصف قطر الموصل الداخلى a والموصل الخارجى b (شكل 2-32).

Solved Problem 2.5

Find the capacitance of a coaxial capacitor of length L, where the inner conductor has radius a and the outer has radius b (Figure 2-32).

الحل: بإهمال التهدب، قانون جاوس يتطلب أن $\mathbf{D} \propto 1/r$ بين الموصلين. عند $r = a$ تكون $\mathbf{D} = \rho_s$ (نتيجة لشروط الحدود بين الموصل والعازل) ρ_s هى الكثافة السطحية على الموصل الداخلى (بفرض أنها شحنة موجبة). على ذلك

$$\mathbf{D} = \rho_s \frac{a}{r}\,\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2, \qquad \mathbf{E} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r}\,\mathbf{a}_r \text{ V/m}$$

وفرق الجهد بين الموصلين

$$V_{ab} = -\int_{b}^{a} \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r} dr = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{b}{a} \text{ V}$$

الشحنة الكلية على الموصل الداخلى $Q = \rho_s(2\pi a l)$ ولذلك

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln(b/a)} \quad \text{F}$$

الفصل الثالث
المجال المغناطيسى الساكن (الثابت)
Static Magnetic Fields

فى هذا الفصل:

- ✔ قانون بيو – سافار
- ✔ قانون أمبير
- ✔ كثافة المجال المغناطيسى وقانون جاوس
- ✔ المحاثة (أو معامل الحث)
- ✔ مسائل محلولة

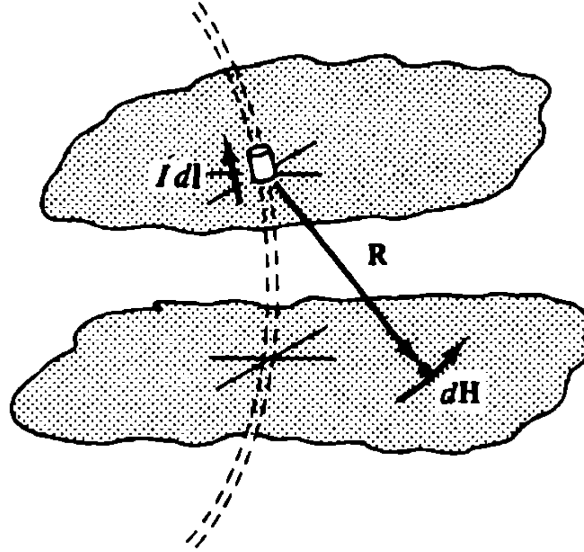
يتولد المجال المغناطيسى الساكن إما من تيار ثابت أو من مغناطيس دائم. هذا الفصل سوف يتناول المجالات من تيار ثابت.

قانون بيو – سافار Biot-Savart Law

يتولد مجال مغناطيسى شدته $d\mathbf{H}$ من عنصر تفاضلى للتيار $I\,d\mathbf{l}$. يتغير المجال عكسيًا مع مربع المسافة، ولا يعتمد على الوسط المحيط، وله اتجاه يتحدد عن طريق الضرب الاتجاهى لـ $I\,d\mathbf{l}$ و $\mathbf{a}_R$. هذه العلاقة تعرف بقانون بيو–سافار (شكل 3-1):

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{A/m}) \qquad (1)$$

حيث $\mathbf{a}_R$ متجه الوحـدة فى اتجاه R. اتجاه R مـن عنصر التيار حتى النقطة المراد تعيين $d\mathbf{H}$ عندها.



شكل 1-3 عنصر تيار يعطى $d\mathbf{H}$

ليس لعناصر التيار وجود منفصل. كل العناصر تُكون فتيله تيار تُسهم فى H ويجب أن تؤخذ فى الاعتبار. وينتج عن الجمع الصيغة التكاملية لقانون بيو-سافار.

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\mathrm{A/m})$$

التكامل يجب أن يكون على مسار مغلق وذلك حتى تؤخذ كل العنـاصر فـى الاعتبار (المسـار قد يكون مغلقاً عند اللانهاية).

مثال 3.1 فتيلة خطية لا نهائية يمر بها تيار I على محور z بنظام الإحداثيات الأسطوانية كما هو موضح بشكل 2-3. أوجد H.

Example 3.1 An infinitely long, straight current filament I along the z-axis in cylindrical coordinates is shown in Figure 3-2. Find **H**.

الحل: سنختار نقطة على المستوى $z = 0$ دون أن نحيد عن الصيغة العامة.

$$\mathbf{R} = r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \mathbf{a}_R = \frac{r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

باستخدام الصورة التفاضلية (1)

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,dz\,\mathbf{a}_z \times (r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I\,dz\,r\mathbf{a}_\phi}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}$$

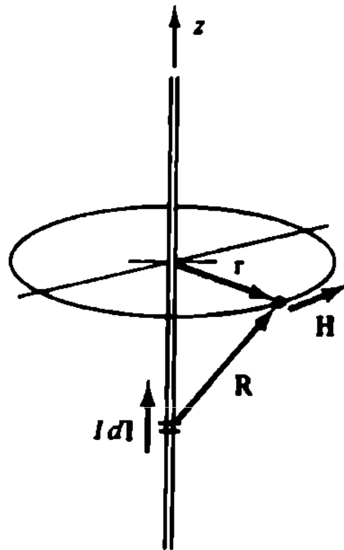
متغير التكامل هو z، حيث أن $\mathbf{a}_\phi$ لا يتغير مع z فإنه يمكن إخراجه من التكامل قبل إجراء التكامل.

$$\mathbf{H} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,r\,dz}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}\right]\mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$

هذه النتيجة الهامة تبين أن H تتناسب عكسيًا مع المسافة فى اتجاه نصف القطر.

ملاحظة!

يتضح أن اتجاه H يتفق مع "قاعدة اليد اليمنى" حيث تشير أصابع اليد اليمنى إلى اتجاه المجال عندما يُقبض على الموصل بحيث يشير الإبهام إلى اتجاه التيار.



شكل 2-3 فتيلة تيار I لا نهائية على محور z

قانون أمبير Ampere's Law

التكامل الخطى لمركبة شدة المجال المماسية حول مسار مغلق يساوى التيار داخل هذا المسار:

$$\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = I_{enc} \qquad (2)$$

هذه هى صورة قانون أمبير التكاملية.

للوهلة الأولى يمكن أن يظن المرء أن هذا القانون يستخدم لتعين I عن طريق التكامل. ولكن بدلاً من ذلك فإن التيار يكون فى العادة معلومًا والقانون يوضح طريقة إيجاد **H**. يماثل هذا استخدام قانون جاوس لإيجاد **D** عند معرفة توزيع الشحنة.

عند استخدام قانون أمبير لتعيين **H** فإنه لا بد أن تكون هناك درجة معقولة من التماثل فى المسألة. شرطان يجب توافرهما:

1. عند كل نقطة للمسار المغلق تكون **H** إما مماسية أو عمودية على المسار.
2. تأخذ **H** قيمة ثابتة على نقط المسار حيث تكون **H** مماسية.

يمكن استخدام قانون بيو-سافار للمساعدة على انتقاء مسار يحقق الشرطين السابقين. فى معظم الحالات يكون المسار المناسب واضحًا.

مثال 3.2 استخدم قانون أمبير لإيجاد **H** الناتجة عن فتيلة تيار I مستقيمة ولا نهائية الطول.

Example 3.2 Use Ampere's law to obtain **H** due to an infinitely long, straight current filament I.

الحل: قانون بيو-سافار يبين أن لكل نقطة على الدائرة فى شكل 3-2 تكون **H** مماسية ولها نفس القيمة. على ذلك

$$\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = H(2\pi r) = I$$

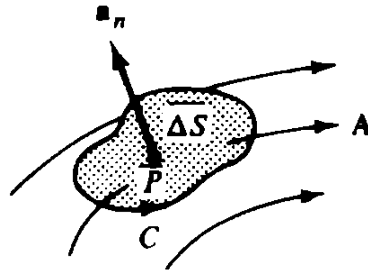
بالحل نحصل على

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

يمكن استنتاج الصورة التفاضلية لقانون أمبير والذى يوجد العلاقة بين المجال المغناطيسى الساكن **H** والتيار الكهربى الثابت. قبل تعريف الصورة التفاضلية لا بد أولاً من تقديم الالتفاف.

الالتفاف بصفة عامة لأى مجال متجه **A** يكون مجالاً متجهًا آخر. تقع النقطة P بشكل 3-3 داخل مساحة مستوية ΔS محاطة بمنحنى مغلق C. فى التكامل الذى يُعرف الالتفاف، C مستعرضة بحيث تكون المساحة المغلقة جهة اليسار. متجه الوحدة العمودى $\mathbf{a}_n$ يحدد عن طريق قاعدة اليد اليمنى (أصابع اليد اليمنى تلتف فى اتجاه التكامل على المسار والإبهام يشير إلى اتجاه العمودى) كما هو مبين بالشكل. إذن مركبة التفاف **A** فى اتجاه $\mathbf{a}_n$ تعرف كما يلى

$$(\text{curl}\,\mathbf{A}) \bullet \mathbf{a}_n = \nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{a}_n \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

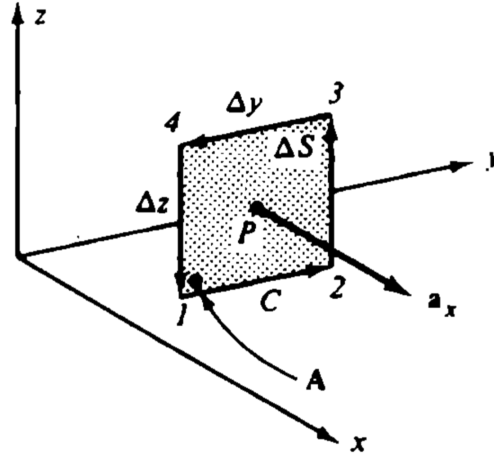


شكل 3-3 تعريف الالتفاف لـ A

فى نظم الإحداثيات يُعْرف الالتفاف **A** عن طريق مركباته فى اتجاه متجه الوحدة للإحداثيات. على سبيل المثال مركبة x فى الإحداثيات الكرتيزية تعرف عن طريق أخذ المسار المربع C فى المستوى x = ثابت خلال النقطة P.

كما هو مبين بشكل 3-4.

$$\nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{a}_x \equiv \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z}$$



شكل 3-4 تعريف مركبة x لالتفاف A

إذا كان $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ عند ركن من أركان ΔS بجوار الأصل (النقطة 1) لذلك

$$\oint = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1$$

$$= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) (-\Delta y) + A_z (-\Delta z)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \, \Delta z$$

وأيضًا

$$\nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{a}_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

يمكن الحصول على المركبات y و z بنفس الطريقة. وبجمع المركبات يكون التفاف A للنظام الكرتيزى

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (3)$$

التعبير عن التفاف A بالإحداثيات الأسطوانية والكروية يمكن استنتاجه بنفس الطريقة السابقة مع بعض الصعوبة. باستخدام الإحداثيات الأسطوانية.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z \quad (4)$$

باستخدام الإحداثيات الكروية

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial (A_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \quad (5)$$

خواص مفيدة لالتفاف A:

1. تشعب الالتفاف لأى متجه يساوى صفرًا.

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

2. التفاف التدرج لأى دالة مقياسية يساوى الصفر.

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

على سبيل المثال للمجال الكهربى الساكن $\mathbf{E} = -\nabla V$ على ذلك

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

هذا اختبار آخر لمتجه المجال المحافظ: إذا كان الالتفاف يساوى الصفر فإن المجال محافظ.

بالنظر إلى قانون أمبير فإنه يمكن كتابة المعادلة التى تعرف $(\text{curl } \mathbf{H})_x$ كما يلى

$$\nabla \times \mathbf{H} \bullet \mathbf{a}_x \equiv \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{I_x}{\Delta y \Delta z} \equiv J_x$$

حيث $J_x = dI_x/dS$ هى الكثافة لوحدة المساحة فى اتجاه x. وعلى ذلك فإن مركبة $(\text{curl } \mathbf{H})_x$ وكثافة التيار J_x متساويان عند أى نقطة. بالمثل العلاقة بالنسبة لمركبة x ومركبة y. وعلى ذلك فإن العلاقة الكلية تكتب كما يلى

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{6}$$

هذه صورة تفاضلية لقانون أمبير للمجال المغناطيسى الساكن وعليه فإن المجال المغناطيسى غير محافظ.

مثال 3.3 موصل طويل مستقيم له مقطع نصف قطره a وله شدة مجال مغناطيسى $\mathbf{H} = (Ir/2\pi a^2)\mathbf{a}_\phi$ داخل الموصل $(r < a)$ وله $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\mathbf{a}_\phi$ لـ $(r > a)$. أوجد كثافة التيار $\mathbf{J}$ للحيزين.

Example 3.3 A long, straight conductor cross section with radius a has a magnetic field strength $\mathbf{H} = (Ir/2\pi a^2)\mathbf{a}_\phi$ within the conductor $(r < a)$ and $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\mathbf{a}_\phi$ for $r > a$. Find the current density $\mathbf{J}$ in both regions.

الحل: داخل الموصل وباستخدام (4) و (6)

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Ir^2}{2\pi a^2}\right)\mathbf{a}_z = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z$$

هذا يناظر تيار بقيمة I فى اتجاه $+z$ وموزع بانتظام على مساحة المقطع πa^2.

خارج الموصل

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I}{2\pi}\right)\mathbf{a}_z = 0$$

هذا يعنى أن التيار يمر بالموصل وهذا أمر طبيعى.

كثافة المجال المغناطيسى وقانون جاوس
Magnetic Flux Density and Gauss' Law

شدة المجال المغناطيسى **H** مثل **D** تعتمد فقط على (حركـة) الشحنـات ولا تعتمـد علـى الوسـط. مجـال القـوة المصـاحب لـ **H** هـو كثافــة الفيــض المغناطيسى **B** الذى يعطى كما يلى

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (7)$$

حيث $\mu = \mu_0 \mu_r$ هى إنفاذية الوسط. وحدة **B** هى تسلا (tesla)

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}$$

إنفاذية الحيز الخالى μ_0 لها قيمة عددية $4\pi \times 10^{-7}$ ولها وحدات هنرى لكل متر H/m. المواد الغير مغناطيسية لها إنفاذية نسبية μ_r قريبة من الواحد أمـا المواد المغناطيسية (مثل الحديد والمواد المغناطيسية) يكـون لـها μ_r أكـبر كثيرًا من الواحد.

التدفق المغناطيسى Φ على سطح يعرف كما يلى

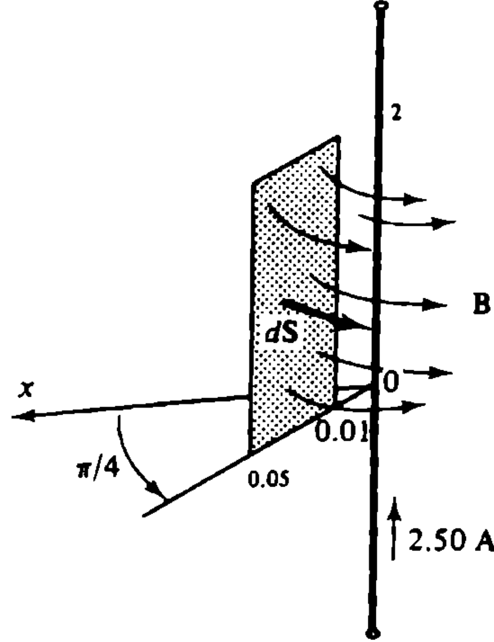
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (8)$$

إشارة Φ يمكن أن تكون موجبة أو سالبة ذلك يعتمد على اختيـار العمـودى على السطح $d\mathbf{S}$. وحدة الفيض المغناطيسى هى الويـبر (weber) Wb. ترتبـط الوحدات المغناطيسية كما يلى

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{Wb/m^2}, \qquad 1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A}$$

مثال 3.4 أوجـد الفيـض العـابر لجـزء مــن المســتوى $\phi = \pi/4$ والمحــدد بـ $0.01 < r < 0.05$ m و $0 < z < 2$ m (انظـر شكـل 5-3) التيـار قيمتـه 2.5 A ويمر فى فتيلة على محور z فى اتجاه $\mathbf{a}_z$.

Example 3.4 Find the flux crossing the portion of the plane $\phi = \pi/4$ defined by $0.01 < r < 0.05$ m and $0 < z < 2$ m (see Figure 3-5). A current filament of 2.50 A along the z-axis is in the $\mathbf{a}_z$-direction.



شكل 3-5 الفيض المغناطيسى خلال مستطيل نتيجة لوجود تيار

الحل: باستخدام شكل 3-5 والنتيجة بمثال 3.2 والمعادلة (7) يمكن الحصول على كثافة الفيض المغناطيسى

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

من الشكل

$$d\mathbf{S} = dr dz\, \mathbf{a}_\phi$$

الفيض المغناطيسى خلال المستطيل [باستخدام (8)] هو كما يلى

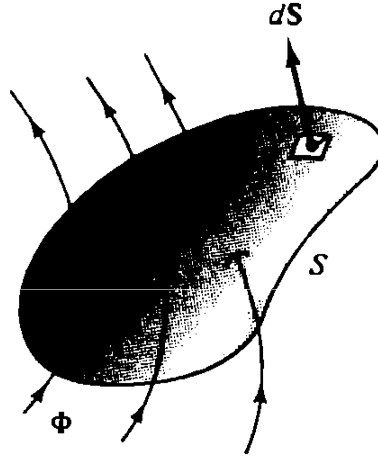
$$\Phi = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \bullet dr\, dz\, \mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.01} = 1.61 \times 10^{-6} \text{ Wb} = 1.61\ \mu\text{Wb}$$

يجب ملاحظة أن خطوط الفيض المغناطيسى Φ هى منحنيات مغلقة ليس لها نقطة بداية أو نهاية. يقال عن هذا أن المجال مُلتَف. هذا يخالف الفيض الكهربى Ψ. حيث يبدأ على الشحنة الموجبة وينتهى على الشحنة السالبة. فى شكل 6-3 كل الفيض المغناطيسى الذى يدخل السطح المغلق لا بد أن يخرج منه، لذا فإن المجال **B** ليس له منابع أو مستقبلات ويعبر عن ذلك رياضيًا بما يلى

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

ملاحظة: المعادلة (9) يشار إليها بقانون جاوس للمجال المغناطيسى.



شكل 6-3 سطح مغلق فى مجال B

المحاثة (أو معامل الحث) Inductance

معامل الحث لموصل L يمكن أن يُعَرف بأنه نسبة الفيض المغناطيس العابر إلى التيار المسبب للفيض. فى الحالة الساكنة (أو فى حالة التردد المنخفض) إذا كان التيار I والملف يحتوى على N لفة كما بشكل 7-3 فإن

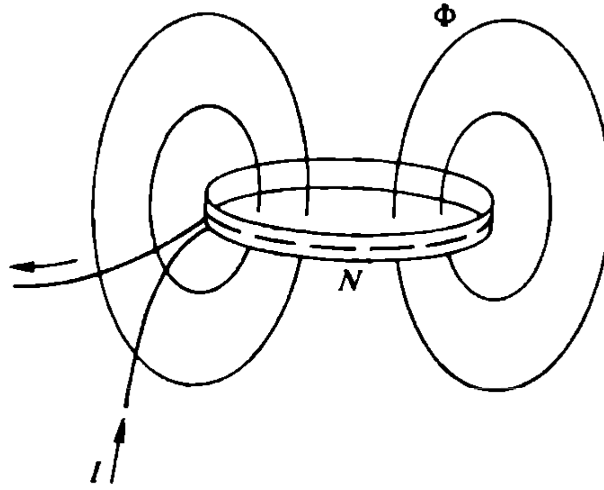
$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{10}$$

حيث Φ الفيض العـابر للفـة واحـدة. وحـدة L هـى الـهنرى (henry) حيـث $1H = 1\ Wb/A$.

معامل الحث يعطى كما يلى

$$L = \frac{\lambda}{I} \tag{11}$$

حيث λ هى الارتباط الفيضى $N\Phi$ لملف عـدد لفاتـه N أمـا فـى تشكيـلات الموصلات الأخرى فهى تكتب ببساطة Φ.

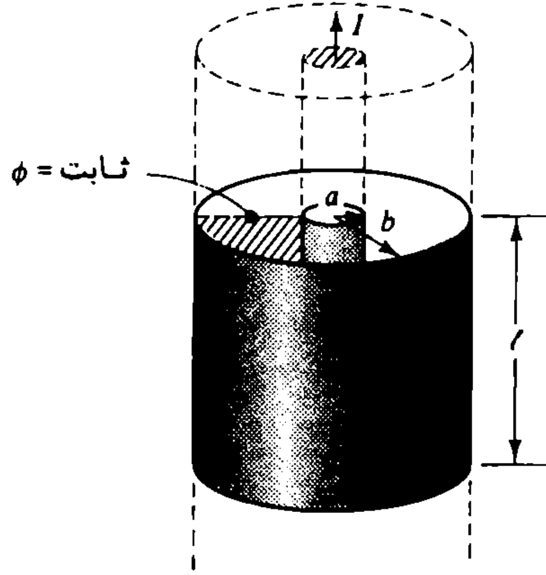


شكل 3-7 الفيض المرتبط فى حالة ملف يمر به تيار

يجب الملاحظة أيضًا أن L تكون حاصل ضرب السماحية للوسط μ ومعامل هندسى يكون الطول وحدة منه.

مثال 3.5 أوجد معامل الحث لوحدة الطول لموصل محورى مثل ذلك الموضح بشكل 3-8.

Example 3.5 Find the inductance per unit length of a coaxial conductor such as that shown in Figure 3-8.



شكل 3-8 موصل محورى

الحل: المجال المغناطيسى بين الموصلين يعطى كما يلى

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$

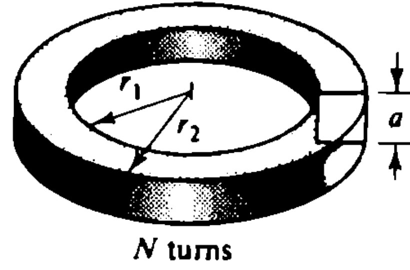
يرتبط التياران بالموصلان عن طريق الفيض العابر للسطح ϕ = ثابت. لطول $\ell = 1$ m.

$$\lambda = \int_0^1\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr\, dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

باستخدام (11) يكون معامل الحث لوحدة الطول للموصل المحورى

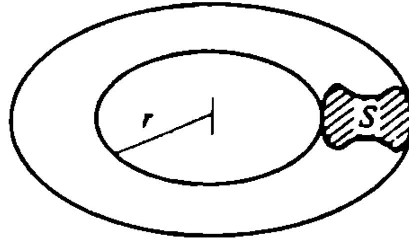
$$L \text{ per meter} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$

تبين الأشكال من 3-9 حتى 3-13 معامل الحث الدقيق أو التقريبى لبعض الأشكال غير المحورية المألوفة.



$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{(H)}$$

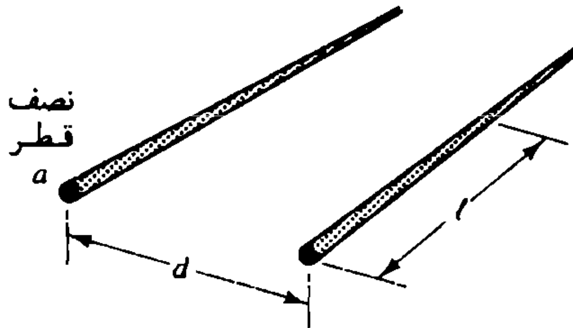
شكل 3-9 ملف حلقى له مساحة مقطع مربعة



$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} \quad \text{(H)}$$

(مع فرض كثافة الفيض متوسطة على نصف قطر متوسط r)

شكل 3-10 ملف حلقى له مساحة مقطع S

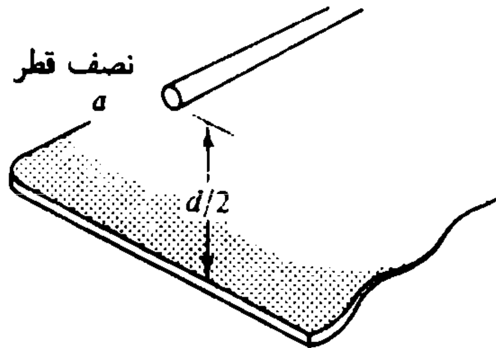


$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \quad \text{(H/m)}$$

For $d >> a$,

$$\frac{L}{\ell} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad \text{(H/m)}$$

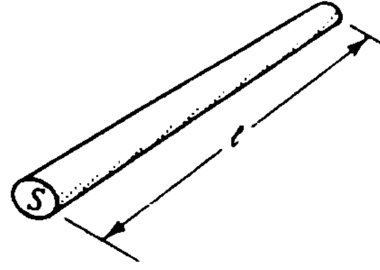
شكل 3-11 موصلان متوازيان نصف القطر a



$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \quad \text{(H/m)}$$

$$\approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d}{a} \quad \text{(H/m)}$$

شكل 3-12 موصل أسطوانى موازٍ لمستوى أرضى



$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad \text{(H)}$$

شكل 13-3 ملف طويل له مساحة مقطع صغيرة S

أشياء هامة للتذكر

- ✔ المجالان المغناطيسيان **H** و **B** يدوران حول الموصل الذى يمر به تيار **I** تبعًا لقاعدة اليد اليمنى.
- ✔ فى الوسط الموحد الخواص **B** =μ **H**.
- ✔ خطوط الفيض المغناطيسى ملتفة وهذا يعنى أنها منحنيات مغلقة بدون بداية ونهاية.
- ✔ الفيض المغناطيسى الكلى الداخل لسطح مغلق يساوى الفيض المغناطيسى الكلى الخارج من السطح.
- ✔ معامل الحث لموصل هو الفيض المغناطيسى العابر لوحدة التيار.

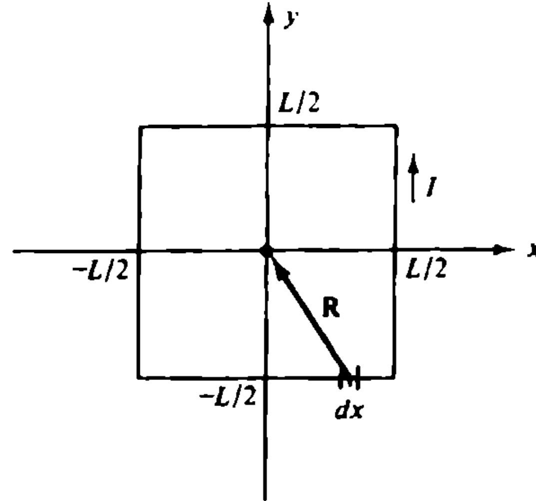
Solved Problems مسائل محلولة

مسألة محلولة 3.1

أوجد **H** فى منتصف حلقة مربعة طول ضلعها L.

Solved Problem 3.1

Find **H** in the center of a square loop of side L.



شكل 14-3 حلقة مربعة لها تيار I.

الحل: باختيار نظام الإحداثيات الكرتيزى تكون الحلقة متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل كما هو موضح بشكل 14-3. نتيجة التماثل فإن كل نصف ضلع ينشأ عنه نفس المقدار لـ **H** عند المنتصف. لنصف الضلع $0 \le x \le L/2$ و $y = -L/2$ وعند تطبيق قانون بيو-سافار فإن المجال عند المنتصف

$$d\mathbf{H} = \frac{(I\,dx\,\mathbf{a}_x)\times[-x\mathbf{a}_x + (L/2)\mathbf{a}_y]}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{I\,dx(L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}} \text{ A/m}$$

ولذلك فإن المجال الكلى عند المنتصف

$$\mathbf{H} = 8\int_0^{L/2} \frac{I\,dx(L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L}\mathbf{a}_z = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L}\mathbf{a}_n \text{ A/m}$$

حيث $\mathbf{a}_n$ متجه الوحدة العمودى على السطح المار بالحلقة كما يعطى عن طريق قاعدة اليد اليمنى.

مسألة محلولة 3.2

موصل أسطواني رقيق له نصف قطر a، ممتد إلى ما لا نهاية يحمل تيار I. أوجد **H** عند كل النقاط باستخدام قانون أمبير.

Solved Problem 3.2

A thin cylindrical conductor of radius a, infinite in length, carries a current I. Find **H** at all points using Ampere's law.

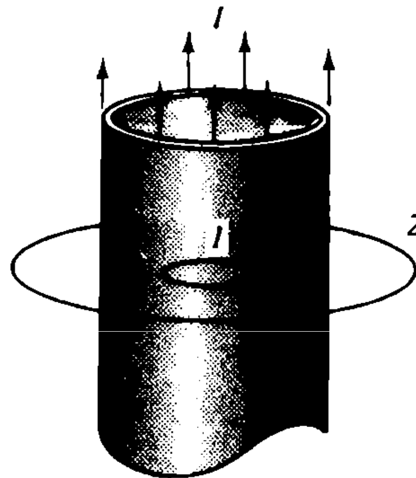
الحل: قانون بيو-سافار يبين أن **H** لها مركبة واحدة فى اتجاه ϕ. أيضًا H_ϕ تعتمد على r فقط. المسارات المناسبة لقانون أمبير هى دوائر متماثلة. للمسار 1 المبين بشكل 3-15.

$$\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi = I_{enc} = 0$$

وللمسار 2

$$\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi = I$$

وعليه $\mathbf{H} = 0$ عند النقط داخل الموصل الأسطوانى الرقيق. أما عند النقط خارج الموصل فإن $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\,\mathbf{a}_\phi$ A/m لـ $r > a$ هذا هو نفس المجال الناشئ عن تيار فتيلة I على امتداد المحور.



شكل 3-15 تيار يمر فى أسطوانة رقيقة

مسألة محلولة 3.3

مجال فى اتجاه نصف القطر

$$\mathbf{H} = \frac{2.39 \times 10^6}{r} \cos\phi \, \mathbf{a}_r \ \text{A/m}$$

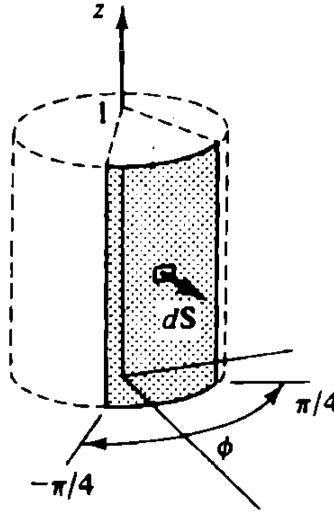
موجود فى الحيز الحر. أوجد الفيض المغناطيسى ϕ الذى يعبر السطح المعرف بـ $-\pi/4 \le \phi \le \pi/4$، $0 \le z \le 1$ m انظر شكل 3-16.

Solved Problem 3.3

A radial field

$$\mathbf{H} = \frac{2.39 \times 10^6}{r} \cos\phi \, \mathbf{a}_r \ \text{A/m}$$

exists in free space. Find the magnetic flux Φ crossing the surface defined by $-\pi/4 \le \phi \le \pi/4$, $0 \le z \le 1$ m. See Figure 3-16.



شكل 3-16 الفيض المغناطيسى العابر لسطح أسطوانى

الحل: كثافة الفيض فى الحيز الحر هى

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{3.00}{r} \cos\phi \, \mathbf{a}_r \ \text{T}$$

والفيض العابر للسطح هو

$$\Phi = \int_{0}^{1} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3.00}{r} \cos\phi \, \mathbf{a}_r \right) \bullet (r \, d\phi \, dz \, \mathbf{a}_r) = 4.24 \text{ Wb}$$

مسألة محلولة 3.4

أوجد معامل الحث لوحدة الطول للموصلات الأسـطوانية المتوازيـة المبينـة بشكل 11-3 حيث قدم $d = 25$ و بوصة $a = 0.803$.

Solved Problem 3.4

Find the inductance per unit length of the parallel cylindrical conductors shown in Figure 3-11, where $d = 25$ feet and $a = 0.803$ inch.

الحل: باستخدام المعادلة بشكل 11-3.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} = (4 \times 10^{-7}) \cosh^{-1} \frac{25(12)}{2(0.803)} = 2.37 \ \mu\text{H/m}$$

المعادلة التقريبية تعطى

$$\frac{L}{\ell} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} = 2.37 \ \mu\text{H/m}$$

عندما تكون $d/a \geq 10$ يمكن استخدام المعادلة التقريبية مع خطأ أقل من 0.5%.

مسألة محلولة 3.5

بفرض أنه يوجد ملف حلقى كالمبين بشكل 9-3 له 700 لفة ونصف قطـر داخلـى 1 cm والخارجى 2 cm والارتفاع $a = 1.5$ cm. أوجـد L باسـتخدام (a) المعادلـة الخاصة بملف حلقى له مساحة مربعة. (b) المعادلة التقديرية العامة للملف الحلقى والتى تشترط أن يكون **H** منتظم عند نصف القطر المتوسط (شكل 10-3).

Solved Problem 3.5

Assume that the air-core toroid shown in Figure 3-9 has 700 turn, an inner radius of 1 cm, an outer radius of 2 cm, and height $a = 1.5$ cm. Find L using (a) the formula for square cross-section toroids; (b) the approximate formula for a general toroid, which assumes a uniform **H** at mean radius (Figure 3-10).

الحل: (a) لمساحة مقطع مربعة ومن شكل 3-9.

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(700)^2 (0.015)}{2\pi} \ln 2 = 1.02 \text{ mH}$$

(b) باستخدام المعادلة التقريبية من شكل 3-10

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(700)^2 (0.01)(0.015)}{2\pi(0.015)} = 0.98 \text{ mH}$$

والنتيجتان تقتربان من بعضهما إذا كان r أكبر كثيراً بالمقارنة بمساحة المقطع.

الفصل الرابع
المجالات المتغيرة مع الزمن ومعادلات ماكسويل
Time-Varying Fields and Maxwell's Equations

فى هذا الفصل:

- ✔ قانون فاراداى والقوة الدافعة الكهربية المستحثة
- ✔ قانون أمبير وتيار الإزاحة
- ✔ شروط الحدود
- ✔ معادلات ماكسويل
- ✔ مسائل محلولة

فى الفصلين الثانى والثالث تـم التعـامل مـع مجـال لا يتغـير مـع الزمـن. لمجال متغير مع الزمن المعـادلات الخاصـة بـ E و H يجـب أن تُعـدل. مجموعة المعـادلات التـى تربـط E و H المتغـيران مـع الزمـن يقـال لـها معادلات ماكسويل Maxwell's Equations.

قانون فاراداى والقوة الدافعة الكهربية المستحثة
Faraday's Law and Induced EMF

التيار الكهربى هو مصدر واحـد مـن مصـادر المجـال المغناطيسـى. لاحـظ فاراداى أن المجال المغناطيسى المتغير مع الزمن ينتج تيـار مُحَـث فـى لفـة

مغلقة من السلك. هذا التيار المُحث مستنتج عن طريق قوة دافعة كهربية (ق.د.ك) (emf) وهى فولتية تنشأ حول الملف.

العلاقة بين emf والمجال المغناطيسى المتغير مع الزمن تعطى عن طريق الصورة التكاملية لقانون فارادای

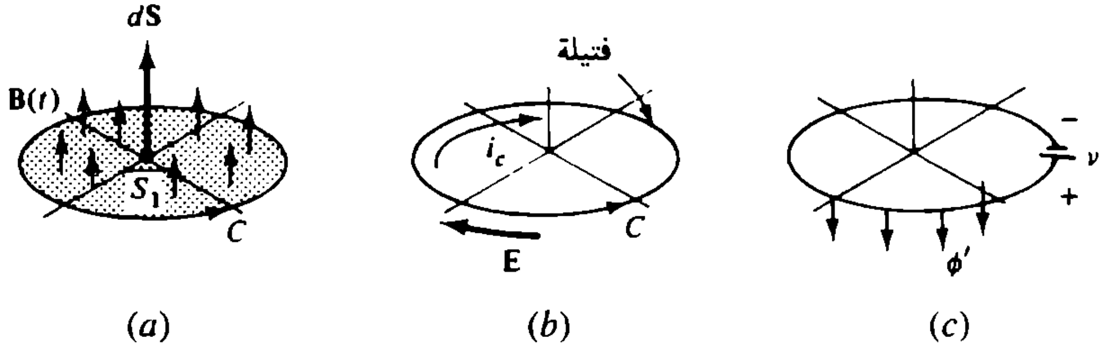
$$emf = \oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{S} \qquad (1)$$



اتجاه المسار C والاتجاه على السطح $d\mathbf{S}$ يرتبطان عن طريق قاعدة اليد اليمنى. إذا كانت الأصابع لليد اليمنى تشير إلى اتجاه التكامل حول C فإن الإبهام فى اتجاه متجه العمودى [شكل 4-1(a)]. الآن إذا كانت **B** تتزايد مع الزمن فإن التفاضل بالنسبة للزمن يكون موجبًا وعليه فإن الطرف الأيمن من المعادلة (1) يكون سالبًا. ليكون التكامل جهة اليسار سالبًا لا بد أن يكون اتجاه **E** عكس المسار [شكل 4-1(b)]. إذا وضعت فتيلة تيار بدلاً من المسار تحمل تيار i_c أيضًا فى اتجاه **E** كما فى شكل 4-1(c) هذا التيار الحلقى ينتج فيض مغناطيسى مُحَث ϕ' وهو فى اتجاه عكس زيادة **B**. هذا يمكن تلخيصه عن طريق قانون لينز Lenz's Law:

☆ ملاحظة!

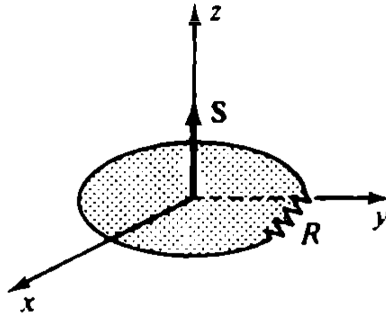
الجهد المتولد عن طريق تغير الفيض له قطبية بحيث أن التيار المستنتج فى مسار مغلق يعطى فيض مغناطيسى ثانوى يُعَاكس التغير فى الزمن للفيض المغناطيسى للمنبع.



شكل 1-4 توضيح قانون لنز

مثال 4.1 الحلقة الدائرية الموصلة المبينة بشكل 2-4 توجد على المستوى $z = 0$. الحلقة لها نصف قطر 0.10 m ومقاومة $R = 5\ \Omega$. إذا كان $\mathbf{B} = 0.20 \sin 10^3 t\ \mathbf{a}_z$ (T) أوجد التيار.

Example 4.1 The circular loop conductor in Figure 4-2 lies in the $z = 0$ plane. The loop has a radius of 0.10 m and a resistance R of 5 Ω. Given $\mathbf{B} = 0.20 \sin 10^3 t\ \mathbf{a}_z$ (T), determine the current.



شكل 2-4 حلقة موصلة لها مقاومة

الحل: الفيض الكلى لا يعتمد على x أو y لذا فإن الفيض الكلى العابر للحلقة

$$\Phi = \mathbf{B} \bullet \mathbf{S} = 2 \times 10^{-3} \pi \sin 10^3 t \quad \text{(Wb)}$$

الجهد (ق.د.ك) حول الحلقة هو

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = -2\pi \cos 10^3 t \quad \text{(V)}$$

والتيار هو

$$i = \frac{v}{R} = -0.4\pi \cos 10^3 t \quad (A)$$

قانون أمبير وتيار الإزاحة

Ampere's Law and Displacement Current

فى حالة المجال الساكن وجد أن التفاف H عند نقطة ما يساوى كثافة تيار التوصيل $\mathbf{J}_c$. وقد أضيف الرمز السفلى c للتأكد من أن الشحنات المتحركة تُكَون التيار. إذا طبق التشعب على الالتفاف لأى متجه فإن المتطابقة الاتجاهية الآتية تتحقق

$$\nabla \bullet \nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad (2)$$

ولكن لـ $\mathbf{J}_c$ لا يساوى صفرًا فى حالة المجال المتغير مع الزمن هذه المعادلة توصف عن طريق معادلة الاستمرارية

$$\nabla \bullet \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (3)$$

معادلة الاستمرارية هى تعبير عن بقاء الشحنة. بمعنى أن معدل حركة الشحنة الخارجة من حيز يساوى المعدل الزمنى لنقص الشحنة داخل الحيز. لذلك فإن ماكسويل افترض أن

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D \qquad (4)$$

حيث $\mathbf{J}_D$ هو كثافة تيار الإزاحة. بأخذ التشعب للمعادلة (4) وباستخدام (2) و(3) يعطى

$$\nabla \bullet \mathbf{J}_c = -\nabla \bullet \mathbf{J}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

باستخدام قانون جاوس [(10) من الفصل الثانى]

$$-\nabla \bullet \mathbf{J}_D = -\frac{\partial \nabla \bullet \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5}$$

باستخدام (5) فى (4) نحصل على الصورة النقطية لقانون أمبير

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{6}$$

الصورة التكاملية لقانون أمبير والتى تتحقق فى حالة التغير مع الزمن يمكن الحصول عليها باستخدام نظرية ستوك والتى تنص على أن

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$$

حيث S سطح مفتوح محدود بالمسار C. بتكامل (6) على سطح مفتوح ثابت يعطى

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \bullet d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l}$$

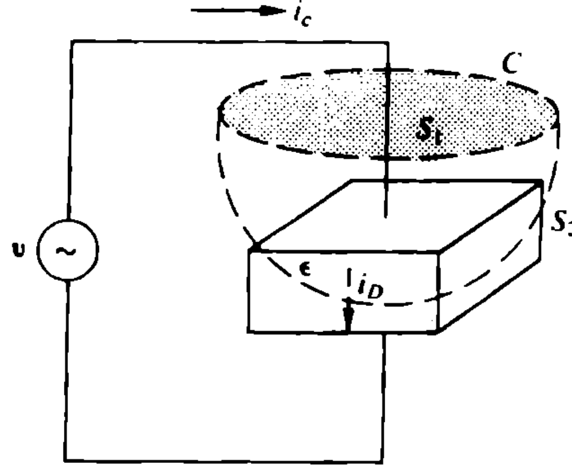
$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_c \bullet d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} \tag{7}$$

الحد الأول للطرف الأيمن للمعادلة (7) هو تيار التوصيل i_c. والحد الثانى بالمعادلة (7) هو تيار الإزاحة i_D خلال سطح ثابت S، ونحصل عليه عن طريق تكامل المركبة العمودية لـ $\mathbf{J}_D$ على السطح (ذلك مماثل لاستنتاج i_c من $\mathbf{J}_c$)

$$i_D = \int_S \mathbf{J}_D \bullet d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \bullet d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} \tag{8}$$

مثال 4.2 يبين أن $i_c = i_D$ فى الدائرة بشكل 3-4.

Example 4.2 Show that $i_c = i_D$ in the circuit of Figure 4-3.



شكل 3-4 دائرة مكثف يتغير فيها المجال مع الزمن

الحل: حيث أن السطحين S_1 و S_2 لهما نفس حدود المسار C.

$$\oint_C \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_c \bullet d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int_{S_1} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{J}_c \bullet d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int_{S_2} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S}$$

بفرض أن الفيض للمكثف محصور داخل المـادة العازلـة بيـن اللوحيـن فـإن $\mathbf{D} = 0$، على السطح S_1. وحيث أنه لا توجد شحنات حرة داخل العـازل فـإن $\mathbf{J}_c = 0$ على السطح S_2. على ذلك

$$\int_{S_1} \mathbf{J}_c \bullet d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\int_{S_2} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \bullet d\mathbf{S} \quad \text{or} \quad i_c = i_D$$

يجب ملاحظة أن $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ليس صفراً فقط على الجزء من السطح S_2 الـذى يوجد داخل العازل.

مثال 4.3: كرر مثال 4.2 ولكن باستخدام تحليل الدوائر.

Example 4.3 Repeat Example 4.2, this time using circuit analysis.

الحل: السعة للمكثف هى

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

حيث A هى مساحة اللوح و d هى الفاصل. وعلى ذلك يكون تيار التوصيل

$$i_c = C\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varepsilon A}{d}\frac{\partial v}{\partial t}$$

من الناحية الأخرى فإن المجال الكهربى مع إهمال التهدب $E = v/d$ وعلى ذلك

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon}{d}v, \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d}\frac{\partial v}{\partial t}$$

وتيار الإزاحة هو [باستخدام (8) وأن **D** عمودى على اللوح]

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \bullet d\mathbf{S} = \int_A \frac{\varepsilon}{d}\frac{\partial v}{\partial t}dS = \frac{\varepsilon A}{d}\frac{\partial v}{\partial t} = i_c$$

شروط الحدود Boundary Conditions

إذا تم إحلال الموصل بشكل 2-23 و 2-24 بعازل آخر مختلف، فإن نفس المناقشة التى تمت على الحدود بين موصل وعازل بالفصل الثانى تعطى المعادلتين الآتيتين لشروط الحدود.

1. المركبة المماسية **E** مستمرة عبر سطح التقابل للعازل. بالرموز

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad \text{and} \qquad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}} \tag{9}$$

2. المركبة العمودية لـ **D** غير مستمرة بقيمة $|\rho_s|$ عبر سطح التقابل للعازل. إذا اختير متجه العمودى على السطح بحيث يتجه إلى العازل 2، فإن هذا الشرط يمكن كتابته كالآتى

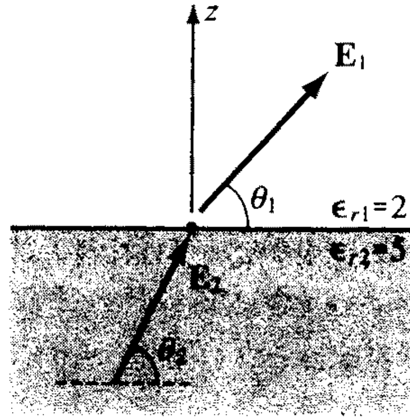
$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_{r2}E_{n2} - \varepsilon_{r1}E_{n1} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

عمومًا فإن سطح التقابل ليس له شحنات حرة لذلك

$$D_{n2} = D_{n1} \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_{r2}E_{n2} = \varepsilon_{r1}E_{n1} \qquad (11)$$

مثال 4.4 إذا كان $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ V/m عند سطح تقابل خالٍ من الشحنات الحرة كما بشكل 4-4 أوجد $\mathbf{D}_2$ والزاويتين θ_1 و θ_2.

Example 4.4 Given that $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ V/m at the charge-free interface of Figure 4-4, find $\mathbf{D}_2$ and the angles θ_1 and θ_2.



شكل 4-4 تقابل عازل مع عازل

الحل: سطح التقابل هو السطح z = ثابت، المركبتان x و y مماسيتان للسطح والمركبة z عمودية. حيث أن مركبات $\mathbf{E}$ المماسية ومركبات $\mathbf{D}$ العمودية استمرارية

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \\
\mathbf{E}_2 &= 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + E_{2z}\mathbf{a}_z \\
\mathbf{D}_1 &= \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\mathbf{E}_1 = 4\varepsilon_0\mathbf{a}_x - 6\varepsilon_0\mathbf{a}_y + 10\varepsilon_0\mathbf{a}_z \\
\mathbf{D}_2 &= \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mathbf{E}_2 = D_{2x}\mathbf{a}_x + D_{2y}\mathbf{a}_y + 10\varepsilon_0\mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

يمكن الحصول على المركبات المجهولة عن طريق العلاقة $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mathbf{E}_2$

$$D_{2x}\mathbf{a}_x + D_{2y}\mathbf{a}_y + 10\varepsilon_0\mathbf{a}_z = 2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mathbf{a}_x - 3\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mathbf{a}_y + \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_{2z}\mathbf{a}_z$$

ومنها

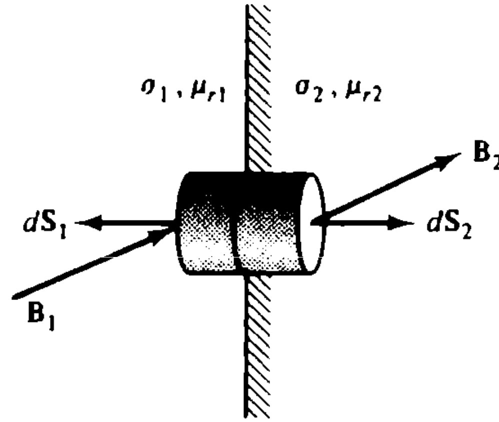
$$D_{2x} = 2\varepsilon_0\varepsilon_{r2} = 10\varepsilon_0,\quad D_{2y} = -3\varepsilon_0\varepsilon_{r2} = -15\varepsilon_0,\quad E_{2z} = \frac{10}{\varepsilon_{r2}} = 2$$

الزوايا مع سطح التقابل يمكن الحصول عليها بسهولة عن طريق

$$\mathbf{E}_1 \bullet \mathbf{a}_z = |\mathbf{E}_1|\cos(90^\circ - \theta_1) \Rightarrow 5 = \sqrt{38}\sin\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 54.2^\circ$$

$$\mathbf{E}_2 \bullet \mathbf{a}_z = |\mathbf{E}_2|\cos(90^\circ - \theta_2) \Rightarrow 2 = \sqrt{17}\sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 29.0^\circ$$

أما بالنسبة للمجال المغناطيسى انظر إلى شكل 5-4 الذى يبين الحدود بين المادة 1 والمادة 2.



شكل 5-4 سطح مغلق على الحدود بين مادتين

سلوك مركبة B العمودية يمكن إيجادها عن طريق استخدام أسطوانة صغيرة قائمة موجودة عبر سطح التقابل كما هو مبين. حيث أن خطوط الفيض المغناطيسى مستمرة

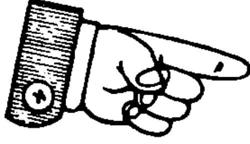
$$\oint \mathbf{B} \bullet d\mathbf{S} = \int_{end\,1} \mathbf{B}_1 \bullet d\mathbf{S}_1 + \int_{curved\,side} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{S} + \int_{end\,2} \mathbf{B}_2 \bullet d\mathbf{S}_2 = 0$$

الآن إذا سمح للنهايتين أن يقتربا من بعض مع الحفاظ على سطح التقابل بينهما فإن مساحة السطح الجانبى تقترب من الصفر هذا يعطى

$$\int_{end\,1} \mathbf{B}_1 \bullet d\mathbf{S}_1 + \int_{end\,2} \mathbf{B}_2 \bullet d\mathbf{S}_2 = 0$$

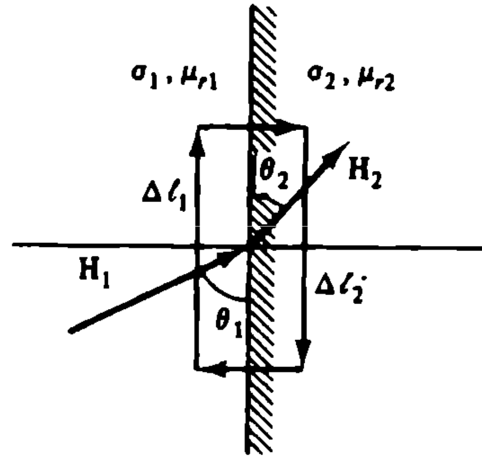
$$-B_{n1} \int_{end\,1} dS_1 + B_{n2} \int_{end\,2} dS_2 = 0$$

$$\Rightarrow B_{n1} = B_{n2} \qquad (12)$$



فى كلمات: المركبة العمودية لـ **B** تكون مستمرة عبر سطح التقابل .

التغير فى **H** المماسية عبر سطح التقابل يعطى عن طريق تطبيق قانون أمبير على مسار المستطيل المغلق المبين بشكل 6-4.



شكل 6-4 مسار مغلق عند الحدود بين مادتين

بفرض أنه لا يوجد تيار على سطح التقابل وأن المستطيل يتقلص حتى الحدود

$$\oint \mathbf{H} \bullet d\mathbf{l} \rightarrow H_{t1}\Delta\ell_1 - H_{t2}\Delta\ell_2 = H_{t1}\Delta\ell - H_{t2}\Delta\ell$$

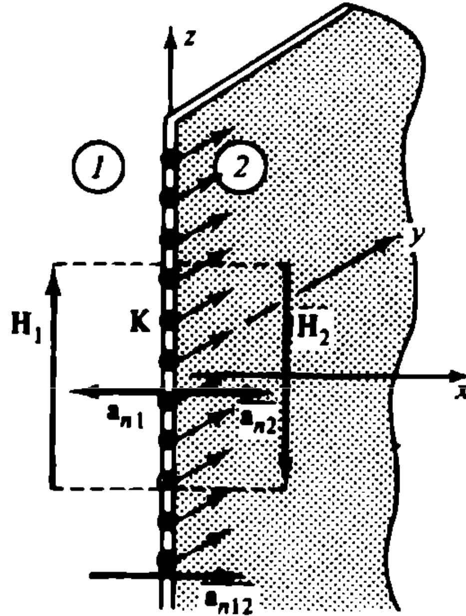
حيث $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell$

بالنسبة لتيار الإزاحة، S هى المساحة المحدودة بالمسار المستطيل. عندما يتقلص المستطيل فإن المساحة تقترب من الصفر لتعطى

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

بالنسبة لتيار التوصيل، توجد تكوينات تُدعم وجود لوح عند الحدود يمر به تيار K(A/m) (شكل 7-4). بهذا الخصوص فإنه مهما صغرت مساحة المستطيل فدائمًا يعطى تيارًا سطحيًا. تيار التوصيل يعطى كما يلى:

$$\int_S \mathbf{K} \bullet d\mathbf{S} \rightarrow K\Delta\ell$$



شكل 7-4 لوح يمر به تيار عند الحدود

بمساواة طرفى قانون أمبير واستخدام ما سبق يعطى

$$H_{t1}\Delta\ell - H_{t2}\Delta\ell = K\Delta\ell \text{ or } H_{t1} - H_{t2} = K$$

حيث أن K متجه فإن هناك تعبيرًا أفضل باستخدام التعبير الاتجاهى يعطى الاتجاه

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \qquad (13)$$

حيث $\mathbf{a}_{n12}$ هو متجه الوحدة العمودى من الحيز 1 إلـى الحـيز 2. فـى حالـة تقابل عازلين غير موصلين (هذا لا يُدّعم تيار على السطح)، $\mathbf{K} = 0$ وتكـون مركبة $\mathbf{H}$ المماسية مستمرة عبر الحدود.

$$H_{t1} = H_{t2} \qquad (14)$$

مثال 4.5 الحيز 1 يحدد بـ $x < 0$ وله سماحية نسبية $\mu_{r1} = 3$. الحيز 2 يحدد بـ $x > 0$ وله سماحية نسبة $\mu_{r2} = 5$. وكلا الحيزين غير موصلين. إذا كان

$$\mathbf{H}_1 = 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ (A/m)}$$

أوجد $\mathbf{H}_2$ و $\mathbf{B}_2$.

Example 4.5 Region 1 is defined for $x < 0$ and has relative permeability of $\mu_{r1} = 3$. Region 2 is defined for $x > 0$ and has relative permeability of $\mu_{r2} = 5$. Neither region is conducting. Given

$$\mathbf{H}_1 = 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ (A/m)}$$

find $\mathbf{H}_2$ and $\mathbf{B}_2$.

الحل: حيث أن الحدود عند $x = 0$ ومركبة x عمودية أما مركبة y ومركبة z فهما مماستان. باستخدام $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\mathbf{B}_1 = 12.0\mu_0\mathbf{a}_x + 9.0\mu_0\mathbf{a}_y - 18.0\mu_0\mathbf{a}_z \text{ (T)}$$

للمواد غير الموصلة فإن المركبات المماسية لـ $\mathbf{H}$ والعمودية لـ $\mathbf{B}$ تكون مستمرة

$$\mathbf{H}_2 = H_{2x}\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ (A/m)}$$
$$\mathbf{B}_2 = 12.0\mu_0\mathbf{a}_x + B_{2y}\mathbf{a}_y - B_{2z}\mathbf{a}_z \text{ (T)}$$

والقيم المجهولة هى

$$H_{2x} = \frac{B_{2x}}{\mu_{r2}\mu_0} = 2.4, \quad B_{2y} = \mu_{r2}\mu_0 H_{2y} = 15.0$$
$$B_{2z} = \mu_{r2}\mu_0 H_{2z} = -30\mu_0$$

معادلات ماكسويل Maxwell's Equations

بتجميع معادلات قانون فارادای وقانون أمبير (مع وجود تيار الإزاحة) وقانون جاوس للمجـال الكهربى والمغناطيسى هـذه المعـادلات تعرف بمعـادلات ماكسويل. فى جدول 1-4 بيان بالمعادلات العامة حيث من الممكن أن يكون هناك شحنات وتيار توصيل بالوسط. فى الفراغ الحر والمواد غـير الموصلـة (التوصيلية $\sigma = 0$)، حيث لا يوجد شحنات ($\rho = 0$) ولا يوجد تيار توصيلـى ($J_c = 0$)، فإن معادلات ماكسويل تأخذ الصور الموجودة بجدول 2-4.

الصورة النقطية	الصورة التكاملية	
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$	(قانون أمبير)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$	(قانون فارادای، s ثابتة)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho \, dv$	(قانون جاوس)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(عدم وجود أقطاب أحادية)

جدول 1-4 معادلات ماكسويل الصورة العامة

الصورة النقطية	الصورة التكاملية
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

جدول 2-4 معادلات ماكسويل فى فراغ حر

أشياء هامة للتذكر

- ✔ المجال B المتغير مع الزمن ينتج تيارًا فى حلقة موصلة.
- ✔ فى قانون أمبير أضاف ماكسويل تيار الإزاحة لتحقيق بقاء الشحنة.
- ✔ E المماسية دائمًا مستمرة عبر الحدود بين مادتين.
- ✔ B العمودية دائمًا مستمرة عبر الحدود بين مادتين.

Solved Problems — مسائل محلولة

مسألة محلولة 4.1 فى مادة لها $\sigma = 5.0$ S/m و $\varepsilon_r = 1$ كانت شدة المجال الكهربى $E = 250 \sin 10^{10} t$ V/m. أوجد كثافة تيار التوصيل وتيار الإزاحة والتردد الذى عنده يتساويان فى المقدار.

Solved Problem 4.1 In a material for which $\sigma = 5.0$ S/m and $\varepsilon_r = 1$, the electric field intensity is $E = 250 \sin 10^{10} t$ V/m. Find the conduction current and displacement current densities and the frequency at which they will have equal magnitudes.

الحل: كثافة تيار التوصيل هى

$$J_c = \sigma E = 1250 \sin 10^{10} t \quad \mathrm{A/m^2}$$

بفرض أن اتجاه المجال لا يتغير مع الزمن

$$J_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 250 \sin 10^{10} t) = 22.1 \cos 10^{10} t \quad \mathrm{A/m^2}$$

لكى يكون $J_c = J_D$، نحن نريد $\sigma = \omega\varepsilon$ أو

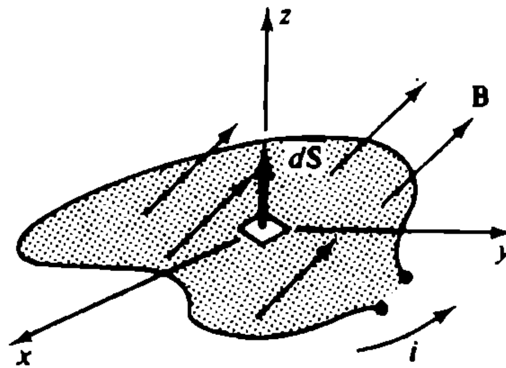
$$\omega = \frac{5.0}{8.854 \times 10^{-12}} = 5.65 \times 10^{11} \text{ rad/s} = 89.9 \text{ GHz}$$

مسألة محلولة 4.2 مساحة مقدارها $0.65\ m^2$ موجود بالمستوى $z = 0$ ويُحدها فتيلة موصلة. أوجد الجهد المستنتج إذا كان

Solved Problem 4.2 An area of $0.65\ m^2$ in the $z = 0$ plane is enclosed by a filamentary conductor. Find the induced voltage given that

$$\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{T}$$

الحل: انظر شكل 8-4.



شكل 8-4 عبور B خلال مساحة يحدها لفة موصلة

الجهد المستنتج يعطى عن طريق قانون فاراداى كالآتى:

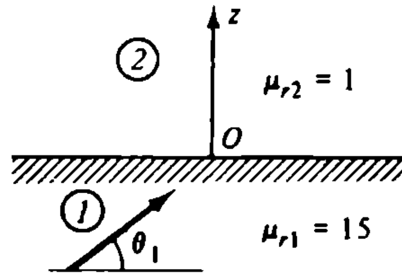
$$v = -\frac{d}{dt} \int_S \left(0.05 \cos 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \right) \bullet (dS\mathbf{a}_z)$$

$$= -\frac{d}{dt} \left(\frac{(0.05 \cos 10^3 t)(0.65)}{\sqrt{2}} \right) = 23.0 \sin 10^3 t \quad \text{V}$$

المجال يتناقص فى النصف دورة الأولى حيث أنها دالة جيب التمام. اتجاه i فى الدائرة المغلقة يجب أن يكون بحيث يعاكس هذا التناقص، ولذلك فإن التيار الاصطلاحى لا بد أن يكون فى اتجاه كما هو مبين بشكل 8-4.

مسألة محلولة 4.3 فى الحيز *1* بشكل 4-9، $\mathbf{B}_1 = 1.2\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z$ أوجد $\mathbf{H}_2$ (أى **H** عند $z = 0^+$) وأوجد الزوايا بين متجه المجال والمماس لسطح التقابل.

Solved Problem 4.3 In region *1* of Figure 4-9, $\mathbf{B}_1 = 1.2\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z$ T. Find $\mathbf{H}_2$ (i.e., **H** at $z = 0^+$) and the angles between the field vectors and tangent to the interface.



شكل 4-9 مسألة على شروط الحدود للمجال المغناطيسى

الحل: اكتب $\mathbf{H}_1$ تحت معادلة $\mathbf{B}_1$. ثم اكتب المركبات لـ $\mathbf{H}_2$ و $\mathbf{B}_2$ والتى تستنتج مباشرة من القاعدتين: **B** العمودية مستمرة و **H** المماسية مستمرة عبر سطح التقابل الخالى من التيار.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= 1.2\mathbf{a}_x \quad +0.8\mathbf{a}_y \quad +0.4\mathbf{a}_z \quad \mathrm{T}\\
\mathbf{H}_1 &= \frac{1}{\mu_0}(8.0\mathbf{a}_x \quad +5.33\mathbf{a}_y \quad +2.67\mathbf{a}_z)10^{-2} \quad \mathrm{A/m}\\
\mathbf{H}_2 &= \frac{1}{\mu_0}(8.0\mathbf{a}_x \quad +5.33\mathbf{a}_y \quad 10^2\mu_0 H_{2z})10^{-2} \quad \mathrm{A/m}\\
\mathbf{B}_2 &= B_{2x}\mathbf{a}_x \quad +B_{2y}\mathbf{a}_y \quad +0.4\mathbf{a}_z \quad \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

الآن القيم الباقية تأتى مباشرة

$$
\begin{aligned}
B_{2x} &= \mu_0\mu_{r2}H_{2x} = 8.0\times10^{-2} \quad \mathrm{T}\\
B_{2y} &= \mu_0\mu_{r2}H_{2y} = 5.33\times10^{-2} \quad \mathrm{T}\\
H_{2z} &= \frac{B_{2z}}{\mu_0\mu_{r2}} = \frac{0.4}{\mu_0} \quad \mathrm{A/m}
\end{aligned}
$$

الزاوية θ_1 هى نفس $90° - \alpha_1$ حيث α_1 هى الزاوية بين $\mathbf{B}_1$ والعمودى $\mathbf{a}_z$.

$$\cos\alpha_1 = \frac{\mathbf{B}_1 \bullet \mathbf{a}_z}{|\mathbf{B}_1|} = 0.27$$

لذلك $\alpha_1 = 74.5°$ و $\theta_1 = 15.5°$. بالمثل $\theta_2 = 76.5°$.

مسألة محلولة 4.4 تيار سطحى $\mathbf{K} = 6.59_z$ A/m على المستوى $x = 0$ الذى يفصل الوسط 1، $x < 0$ عن الوسط 2، $0 < x$. إذا كانت $\mathbf{H}_1 = 10\mathbf{a}_y$ A/m أوجد $\mathbf{H}_2$ عند $x = 0^+$.

Solved Problem 4.4 A current sheet $\mathbf{K} = 6.5\mathbf{a}_z$ A/m at $x = 0$ separates region *1*, $x < 0$, where $\mathbf{H}_1 = 10\mathbf{a}_y$ A/m and region *2*, $x > 0$. Find $\mathbf{H}_2$ at $x = 0^+$.

الحل: لم يذكر شىء عن سماحية الوسطين وعلى أى حال حيث أن كل $\mathbf{H}_1$ مماسية، فتغيير السماحية ليس لها أى تأثير ($B_{n1} = 0$، $B_{n2} = 0$ ولذلك $H_{n2} = 0$) الآن،

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$
$$(10\mathbf{a}_y - H_{2y}\mathbf{a}_y)\times\mathbf{a}_x = 6.5\mathbf{a}_z$$
$$(10 - H_{2y})(-\mathbf{a}_z) = 6.5\mathbf{a}_z$$
$$H_{2y} = 16.5 \quad \text{A/m}$$

إذن $\mathbf{H}_2 = 16.5\mathbf{a}_y$ A/m.

مسألة محلولة 4.5 إذا كان $\mathbf{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_x$ فى وسط خالٍ. أوجد $\mathbf{E}$.

Solved Problem 4.5 Given $\mathbf{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_x$ in free space, find $\mathbf{E}$.

الحل: باستخدام قانون أمبير (فى عدم وجود $\mathbf{J}$).

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(H_m e^{j(\omega t+\beta z)})\mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$j\beta H_m e^{j(\omega t+\beta z)}\mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\beta H_m}{\omega} e^{j(\omega t+\beta z)}\mathbf{a}_y \quad \mathrm{C/m^2}$$

و

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\beta H_m}{\omega \varepsilon_0} e^{j(\omega t+\beta z)}\mathbf{a}_y \quad \mathrm{V/m}$$

الفصل الخامس
الموجات الكهرومغناطيسية
Electromagnetic Waves

فى هذا الفصل:

- ✔ معادلات الموجة والحلول بالإحداثيات الكرتيزية
- ✔ الانتشار فى أوساط مختلفة
- ✔ شروط الحدود للسقوط العمودى
- ✔ السقوط المائل وقوانين سنيل
- ✔ مسائل محلولة

هذا الفصل يتناول حلول لمعادلات ماكسويل لانتشار الموجات الكهرومغناطيسية مثل موجة الراديو. حيث أن معظم الأوساط ذات الأهمية تكون خالية من الشحنة فسوف يفترض أن كثافة الشحنة $\rho = 0$ بالإضافة إلى ذلك سوف يفترض أن المواد خطية وموحدة الخواص، حيث أن $D = \varepsilon E$، $B = \mu H$، $J = \sigma E$.

معادلات الموجة والحلول بالإحداثيات الكرتيزية
Wave Equations and Solutions in Rectangular Coordinates

مع الفروض السابقة ويفرض أن كل من E و H تعتمد على الزمن $e^{j\omega t}$، معادلات ماكسويل (جدول 1-4) تصبح

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad (2)$$

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \bullet B = 0 \qquad (4)$$

بأخذ الالتفاف لـ (1) و (2)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = (\sigma + j\omega\varepsilon)(\nabla \times \mathbf{E})$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H})$$

باستخدام المتطابقة الاتجاهية

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

حيث الابلاسيان (Laplacian) للمتجه **F** بالإحداثيات الكرتيزية هو

$$\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{a}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{a}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{a}_z$$

أيضًا باستخدام الإحداثيات الكرتيزية

$$\nabla^2 F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2}$$

بالتعويض بالمتطابقة الاتجاهية فى "الالتفاف المزدوج" واستخدام (3) و (4) نحصل على المعادلات المتجهة للموجة

$$\nabla^2\mathbf{H} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{H} = \gamma^2\mathbf{H}$$
$$\nabla^2\mathbf{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} = \gamma^2\mathbf{E}$$

ثابت الانتشار γ هو الجذر التربيعى لـ γ^2. الجزء الحقيقى والتخيلى لـ γ كما يلى

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

وأن

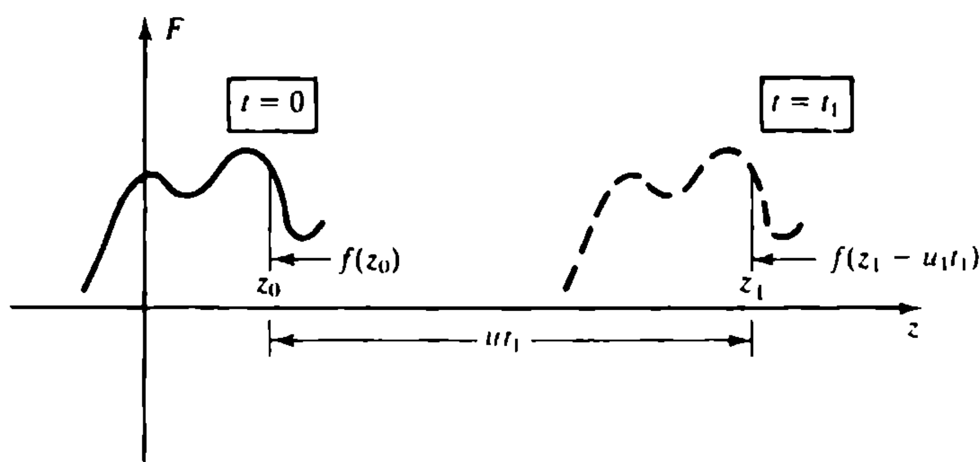
$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)} \qquad (5)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)} \qquad (6)$$

المعادلة المألوفة المقياسية للموجة فى بعد واحد هى

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

لـها حلـول علـى صـورة $F = f(z-ut)$ و $F = g(z+ut)$ حيـــث f و g دوال اختيارية تمثل موجات تنتشر بسرعة u فى اتجاه z+ و z− على الترتيب. فــى شكل 1-5 الحل الأول مُبين عند $t=0$ و $t=t_1$ وظاهر أن الموجة تقدمت فى اتجاه z+ مسـافة مقدارها ut_1 فى الفترة الزمنية t_1.



شكل 1-5 انتشار موجة فى اتجاه z+

كاختيار خاص

$$f = Ce^{-j\omega z/u} \text{ and } g = De^{+j\omega z/u}$$

أمكن الحصول على موجات توافقية لها تردد زاوى ω

$$F = Ce^{j(\omega t-\beta z)} \text{ and } F = De^{j(\omega t+\beta z)}$$

حيث $\beta = \omega/u$. بالطبع فإن الجزء الحقيقــى والتخيلـى أيضًـا حـل لمعادلـة الموجة. وأحد هذه الحلول

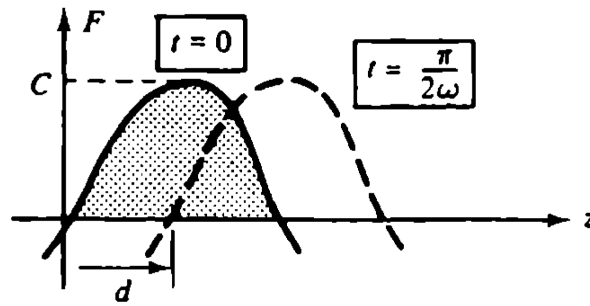
$$F = C\sin(\omega t-\beta z)$$

مبين بشكل 2-5 عند $t = 0$ و $t = \pi/2\omega$. فى خلال هذه الفترة الزمنية تقدمت الموجة فى اتجاه $+z$ مسافة $d = u(\pi/2\omega) = \pi/2\beta$.

عند زمن محدد تكرر الموجة نفسها، عندما تتغير z بمقدار $2\pi/\beta$ نحصل على المسافة

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad (7)$$

ويطلق على هذه المسافة طول الموجة Wave Length



شكل 2-5 انتشار موجة توافقية

يرتبط طول الموجة بالتردد عن طريق

$$\lambda = \frac{u}{f}$$

معادلات الموجة المتجهة لها حلول مشابهة لهذه التى تمــت مناقشتـها تـوًا.

بالإحداثيات الكرتيزية، معادلة الموجة لـ **H** يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}=\gamma^2 \mathbf{H}$$

الحلول لموجات مستوية التى تعتمد على إحداثى فراغــى واحــد لــه أهميــة خاصة. وتصبح المعادلة

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}=\gamma^2 \mathbf{H}$$

وعند فرض الاعتماد على الزمن $e^{j\omega t}$ تكون متجه يماثل معادلة موجة مقياسية ذات بعد واحد. وتكون الحلول كما بالسابق بدلالة ثابت الانتشار γ.

$$\mathbf{H}(z,t)=H_0\, e^{\pm\gamma z}\, e^{j\omega t}\, \mathbf{a}_H$$

والحلول المقابلة للمجال الكهربى هى

$$\mathbf{E}(z,t)=E_0\, e^{\pm\gamma z}\, e^{j\omega t}\, \mathbf{a}_E$$

متجها الوحدة $\mathbf{a}_H$ و $\mathbf{a}_E$ محددان ومتعامدان وليس لأى منهما مركبة فى اتجاه الانتشار. وهذه تكون الحالة إذا أديرت المحاور لوضع أحد المجالات، وليكن **E** فى اتجاه x. عند ذلك وباستخدام معادلـة ماكســويل (2) هــذا ينتــج أن **H** تكون فى اتجاه محور $\pm y$ وذلك لانتشار الموجة فى اتجاه $\pm z$.

الانتشار فى أوساط مختلفة

Propagation in Various Media

الحلول لموجة مستوية التى تم الحصول عليها أعلاه تعتمد على الخصائص μ، ε و σ للوسط لأن ثابت الانتشار γ يعتمد على هذه الخصائص. لوسط به نسبة توصيل ولكن ليس كثيرًا (مثل: التربة الرطبة وماء البحر) يكــون الحــل لمعادلة الموجة لـ **E**

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\gamma z}\mathbf{a}_x$$

حيث تم إخفاء الاعتماد على الزمن $e^{j\omega t}$. إذن من المعادلة (2)

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}}\, E_0 e^{-\gamma z}\mathbf{a}_y$$

النسبة E/H هى خاصية الوسط للموجات المستوية.

بالنسبة E و H أعلاه تعرف الممانعة الذاتية Intrinsic Impedance للوسط عن طريق

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = |\eta| e^{j\theta}\ (\Omega) \qquad (8)$$

حيث $\tan 2\theta = \sigma/\omega\varepsilon$. إذا كانت الموجة تنتشر فى اتجاه $-z$ فإن $E_x/H_y = -\eta$.

بإظهار معامل الزمن $e^{j\omega t}$ وكتابته $\gamma = \alpha + j\beta$ تنتج المعادلات الآتية للمجال فى وسط موصل جزئيًا

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\, e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t - \beta z - \theta)}\mathbf{a}_y$$

المعامل $e^{-\alpha z}$ يُضعِف القيمة لكل من **E** و **H** كلما انتشر فى اتجاه +z.

لعازل مثالى، $\sigma = 0$ لذلك

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \theta = 0° \qquad (9)$$

بما أن $\alpha = 0$، فإنه لا يوجد توهين للموجات **E** و **H**. فى هذه الحالة تكون الموجات

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\, e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{\eta}\, e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_y$$

سرعة الانتشار هى $u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ فى الفراغ الحر تكون السماحية والإنفاذية على الترتيب $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m و $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m هذا يعطى $u = 3 \times 10^8$ m/s و $\eta = 120\,\pi\,\Omega$.

تُصَنف المواد عادة كموصلات جيدة إذا كان $\sigma >> \omega\varepsilon$ فى مدى الترددات العملية. وعلى ذلك فإن ثابت الانتشار والممانعة الذاتية فى هذه الحالة

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}, \quad \eta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^\circ$$

من الواضح أن كل موصلات الموجات تتوهن.

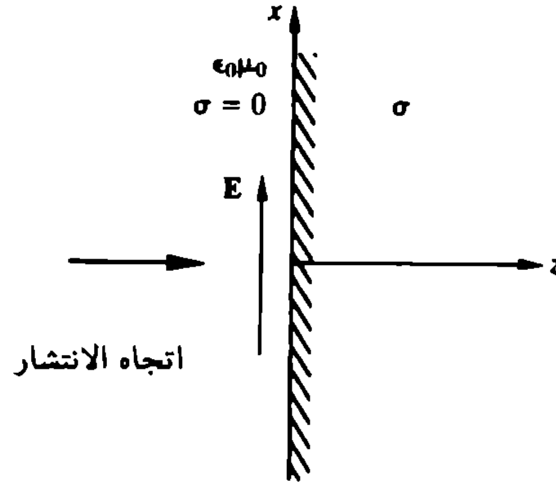
ملاحظة!

العمق الذى عنده يكون المجال قد توهن إلى 37 % من قيمته الأصلية يعطى بالعمق السطحى δ Skin Depth.

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \text{ m}$$

مثال 5.1 افرض أن مجالاً $\mathbf{E}(z,t) = 1.0e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x$ V/m بتردد $f = 100$ MHz عند سطح موصل من النحاس $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m. وموضوع فى $z > 0$ كما هو مبين بشكل 5.3. اختبر التوهين عند انتشار الموجة بداخل الموصل.

Example 5.1 Assume a field $\mathbf{E}(z,t) = 1.0e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x$ V/m with frequency $f = 100$ MHz at the surface of a copper conductor, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, located at $z > 0$, as shown in Figure 5-3. Examine the attenuation as the wave propagates into the conductor.



شكل 3-5 موجة مستوية تنتشر داخل النحاس

الحل: عند عمق z قيمة المجال تكون

$$|\mathbf{E}| = 1.0e^{-\alpha z} = 1.0e^{-z/\delta}$$

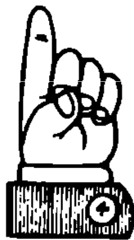
حيث

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 6.61 \quad \mu\text{m}$$

على ذلك فإن قيمة المجال بعد فقط $6.61\ \mu\text{m}$ ينقص إلى % 37= e^{-1} من القيمة الابتدائية. عند $z = 5\ \delta$ أو $z = 33\ \mu\text{m}$ تصل القيمة إلى % 0.67 من القيمة الابتدائية عمليًا هذه القيمة تساوى صفرًا.

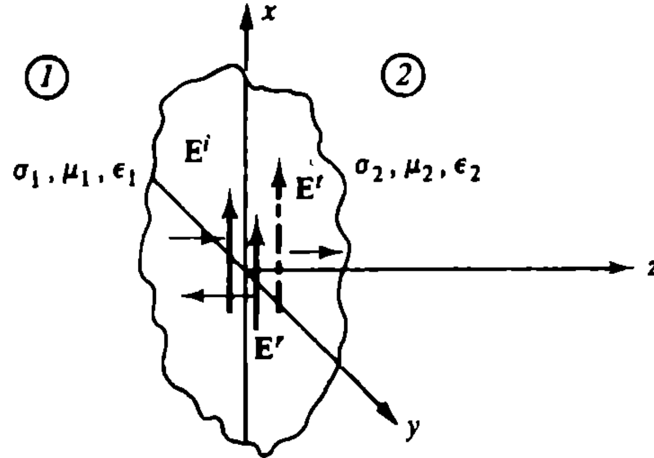
شروط الحدود للسقوط العمودى

Interface Conditions for Normal Incidence



عندما تصل موجة منتشرة إلى فاصل بين منطقتين مختلفتين فإنها تنعكس جزئيًا وتنفذ جزئيًا، وتتحدد قيم هذين الجزئين عن طريق ثوابت المنطقتين. شكل 4-5 يوضح موجة منتشرة تصل إلى سطح التقابل $z = 0$ من المنطقة 1 $(z < 0)$. الموجات

الساقطة $\mathbf{E}^i$ والموجـات المنعكسـة $\mathbf{E}^r$ سـيتم حسـابها عنـد $z = 0^-$. الموجـة النافذة فى المنطقة 2 $(z > 0)$ سيتم حسابها عنـد $z = 0^+$. يفـترض أن يكـون السقوط عمودى (إى أن الموجة تنتشر فى اتجاه عمودى على سطح التقابل)



شكل 4-5 سقوط عمودى لموجة على حدود مستوية

المعادلات E و H يمكن كتابتها كما يلى

$$\mathbf{E}^i(z,t) = E_0^i\, e^{-\gamma_1 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{E}^r(z,t) = E_0^r\, e^{\gamma_1 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{E}^t(z,t) = E_0^t\, e^{-\gamma_2 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{H}^i(z,t) = H_0^i\, e^{-\gamma_1 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{H}^r(z,t) = H_0^r\, e^{\gamma_1 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{H}^t(z,t) = H_0^t\, e^{-\gamma_2 z}\, e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$

يمكن أخذ أحد الثوابت الستة فى الغالب E_0^i ليكون مقداراً حقيقيًـا. تحـت شـروط الحدود التى سوف يتم استنتاجها سوف يكون ثابت أو أكثر مقداراً مركبًا.

مع السقوط العمودى فإن E وH يكونـان مماسـان تمامًـا بالنسـبة لسـطح التقابل، وبناء على شروط الحدود (الفصل الرابع) فإنهما يكونـان مسـتمران. عند $z = 0$ هذا يعطى

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t, \qquad H_0^i - H_0^r = H_0^t$$

إضافة إلى ذلك فإن النسبة للممانعة الذاتية للموجات تساوى $\pm E_x/H_y$ وهى

$$\frac{E_0^i}{H_0^i} = \eta_1, \quad \frac{E_0^r}{H_0^r} = -\eta_1, \quad \frac{E_0^t}{H_0^t} = \eta_2$$

باستخدام المعادلات الخمس أعلاه يمكن استنتاج النسب الآتية

$$\Gamma_E = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \Gamma_H = \frac{H_0^r}{H_0^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (10)$$

$$T_E = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \quad T_H = \frac{H_0^t}{H_0^i} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (11)$$

حيث Γs و Ts هما معامل الانعكاس ومعامل النفاذ على الترتيب. المعاوقة الذاتية مُعرَّفة بالمعادلة (8) و (9).

مثال 5.2 موجة منتشرة **E** و **H** فى وسط حر (منطقة 1) تسقط عمودية على سطح تقابل مع عازل مثالى (منطقة 2، $\sigma_2 = 0$) ولها $\varepsilon_{r2} = 3.0$. قارن بين قيم الموجات الساقطة والمنعكسة لـ **E** و **H** عند سطح التقابل.

Example 5.2 Traveling **E** and **H** waves in free space (region 1) are normally incident upon a planar interface with a perfect dielectric (region 2, $\sigma_2 = 0$) for which $\varepsilon_{r2} = 3.0$. Compare the magnitudes of the incident, reflected and transmitted **E** and **H** waves at the interface.

الحل: القيم تعطى عن طريق معامل الانعكاس ومعامل النفاذ من (10) و (11).

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi\ \Omega, \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 217.7\ \Omega$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.268, \quad \frac{H_0^r}{H_0^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.268$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.732, \quad \frac{H_0^t}{H_0^i} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 1.268$$

عندما تنتشر الموجة فى عازل ($\sigma_1 = 0$) وتسقط على موصل مثالى ($\sigma_2 = \infty$, $\eta_2 = 0$)، باتحاد الموجة المنعكسة مع الموجة الساقطة تنتج موجة واقفة Standing Waves مثل هذه الموجة تم وصفها عن طريق حبل مشدود ومثبت، الاهتزازات لكل النقاط فى نصف طول الموجة تنتشر فى طور زمنى واحد. محصلة جمع الموجات الساقطة والمنعكسة يمكن أن تكتب

$$\mathbf{E}(z,t) = [E_0^i e^{j(\omega t-\beta z)} + E_0^r e^{j(\omega t+\beta z)}]\mathbf{a}_x = e^{j\omega t}(E_0^i e^{-j\beta z} + E_0^r e^{j\beta z})\mathbf{a}_x$$

حيث أن $\eta_2 = 0$ لذلك $E_0^r / E_0^i = -1$ و

$$\mathbf{E}(z,t) = e^{j\omega t}(E_0^i e^{-j\beta z} - E_0^i e^{j\beta z})\mathbf{a}_x = -2jE_0^i \sin\beta z\, e^{j\omega t}\,\mathbf{a}_x$$

أو بأخذ الجزء الحقيقى

$$\mathbf{E}(z,t) = 2E_0^i \sin\beta z \sin\omega t\ \mathbf{a}_x$$

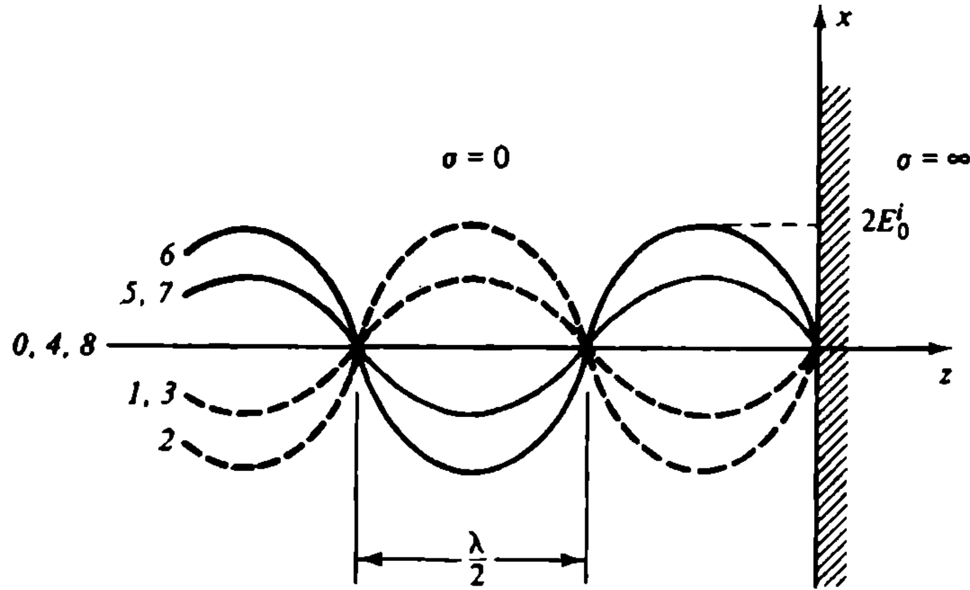
شكل 5-5 يبين الموجة الواقفة لفترات زمنية $T/8$ حيث $T = 2\pi/\omega$ زمن الدورة الواحدة. عندما $t = 0$ يكون $\mathbf{E} = 0$ فى كل مكان؛ عند $t = 1(T/8)$ فإن نقط النهاية للمتجه **E** تقع على المنحنى 1، عند $t = 2(T/8)$ فإن نقطة النهاية للمتجه **E** تقع على المنحنى الجيبى 2 وهكذا. حيث أن المنحنى 2 والمنحنى 6 يشكلان الغلاف الخارجى للاهتزازات، قيمة هذا الغلاف هى ضعف قيمة الموجة الساقطة. يلاحظ أن قطاعات نصف الموجة المتجاورة تكون زاوية $180°$ مع بعضها.

السقوط المائل وقوانين سنيل

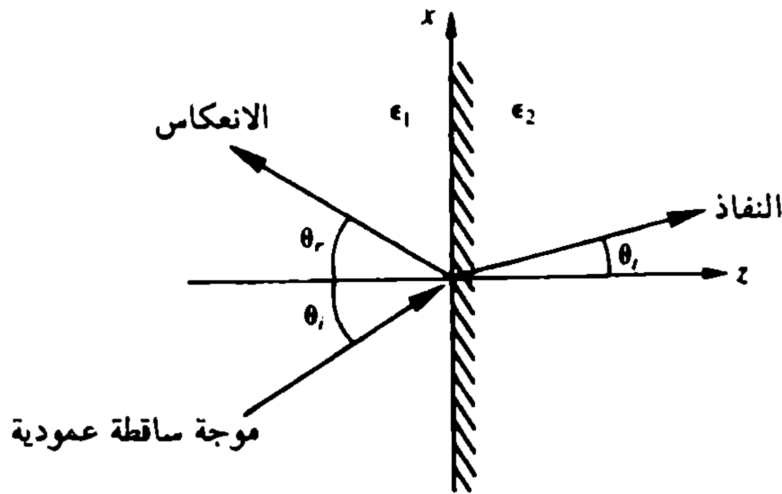
Oblique Incidence and Snell's Laws

عندما تقترب موجة ساقطة من سطح التقابل بين وسطين مختلفين فإنه ينتج عن هذا موجة نافذة فى الوسط الثانى وموجة منعكسة فى الوسط الأول.

مستوى السقوط Plane of Incidence هو المستوى الذى يمر باتجاه انتشار الموجة والعمودى على سطح التقابل. مستوى السقوط بشكل 5-6 هو المستوى xz. اتجاه انتشار الموجة المنعكسة والنافذة تقع أيضًا على مستوى السقوط.



شكل 5-5 الموجات الواقفة لسقوط موجة عمودى



شكل 5-6 السقوط المائل للموجة

زاوية السقوط θ_i زاوية الانعكاس θ_r وزاوية النفاذ θ_t كلها مبينة بشكل 5-6 وتخضع لقانون سنيل للانعكاس

$$\theta_i = \theta_r \qquad (12)$$

وقانون سنيل للانكسار

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} \qquad (13)$$

مثال 5.3 موجة تسقط بزاوية 30° من هواء إلى مادة التفلون teflon $\varepsilon_r = 2.1$. أوجد زاوية النفاذ وكرر المطلوب عند استبدال الوسطين ببعضهما. السماحية لكل وسط هي μ_0.

Example 5.3 A wave is incident at an angle of 30° from air to teflon, $\varepsilon_r = 2.1$. Calculate the angle of transmission and repeat with an interchange of the regions. The permeability of both regions is μ_0.

الحل: باستخدام قانون سنيل للانكسار (13)

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} = \sqrt{2.1} \quad \text{or} \quad \theta_t = 20.18^\circ$$

من التفلون إلى الهواء

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} = \frac{1}{\sqrt{2.1}} \quad \text{or} \quad \theta_t = 46.43^\circ$$

بفرض أن الوسطين لهما نفس السماحية وعندما يكون الانتشار من الوسط الأكثف ضوئيًا $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ ينتج أن $\theta_t > \theta_i$. عندما تزداد θ_i فإننا نصل إلى زاوية سقوط عندها تكون $\theta_t = 90°$. عند هذه الزاوية الحرجة للسقوط فإنه بدلاً من نفاذ الموجة إلى الحيز الثانى سنجد موجة تنتشر على السطح الزاوية الحرجة Critical Angle تعطى كما يلى

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \qquad (14)$$

مثال 5.4 ما هى الزاوية الحرجة لموجة تنتشر من تفلون إلى الفراغ الحر؟

Example 5.4 What is the critical angle for a wave propagating from teflon into free space?

الحل: باستخدام (14)

$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2.1}} = 43.64°$$

فى حالة السقوط المائل إذا كانت **E** فى اتجاه موازٍ لمستوى السقوط فإنه يمكن إيجاد زاوية تنعدم عندها الموجة المنعكسة.

زاوية بروستر Brewster Angle التى عندها ينعدم الانعكاس هى

$$\theta_B = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \qquad (15)$$

مثال 5.5 ما هى زاوية بروستر لموجة تنتشر من الهواء إلى الزجاج الذى له $\varepsilon_r = 5.0$؟

Example 5.5 What is the Brewster angle for a wave traveling from air into glass for which $\varepsilon_r = 5.0$?

الحل: باستخدام (15)

$$\theta_B = \tan^{-1}\sqrt{5.0} = 65.91°$$

أشياء هامة للتذكر

- ✔ الموجات المستوية لها كل من **E** و**H** متعامدان على اتجاه الانتشار.
- ✔ فى المواد الموصلة $(\sigma \neq 0)$، العمق السطحي δ هو المسافة التى عندها تقل قيمة الموجة المستوية إلى 37 % من القيمة الأصلية.
- ✔ للوسطين بصفة عامة الموجة الساقطة ينشأ عنها موجة منعكسة وموجة نافذة.
- ✔ لمسائل السقوط المائل، قوانين سنيل تحكم زوايا الانعكاس والنفاذ.

مسألة محلولة 5.1 فى الفراغ الحر $\mathbf{E} = 10^3\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$ V/m أوجد $\mathbf{H}(z,t)$.

Solved Problem 5.1 In free space, $\mathbf{E} = 10^3\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$ V/m. Obtain $\mathbf{H}(z,t)$.

الحل: بفحص الزاوية $\omega t - \beta z$ يتبين أن اتجاه الانتشار هو $+z$. حيث أن $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ لا بد أن يكون فى اتجاه $+z$، فإن $\mathbf{H}$ لا بد أن يكون فى اتجاه $-\mathbf{a}_x$ وعليه

$$\frac{E_y}{-H_x} = \eta_0 = 120\pi\ \Omega \quad \text{or} \quad H_x = -\frac{10^3}{120\pi}\sin(\omega t - \beta z)\ \text{A/m}$$

وأيضًا

$$\mathbf{H} = -\frac{10^3}{120\pi}\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x\ \text{A/m}$$

مسألة محلولة 5.2 احسب الممانعة الذاتية η وثابت الانتشار γ وسرعة الموجة u لوسط موصل له $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m، $\mu_r = 1$ والتردد $f = 100$ MHz.

Solved Problem 5.2 Calculate the intrinsic impedance η, the propagation constant γ and the wave velocity u for a conducting medium in which $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 1$ and the frequency is $f = 100$ MHz.

الحل: لموصل جيد

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^\circ = 3.69\times10^{-3}\angle 45^\circ\ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{\omega\mu\sigma}\angle 45^\circ = 2.14\times10^5\angle 45^\circ\ \text{m}^{-1}$$

$$\alpha = \beta = 1.51\times10^5, \quad \delta = \frac{1}{\alpha} = 6.61\ \mu\text{m}, \quad u = \omega\delta = 4.15\times10^3\ \text{m/s}$$

مسألة محلولة 5.3 موجة مستوية منتشرة فى اتجاه $+z$ فى فـراغ حـر $(z < 0)$ تسقط عمودية على موصـل $(z > 0)$ الذى لـه $\sigma = 6.17 \times 10^7$ S/m، $\mu_r = 1$

وإذا كان التردد $f = 1.5$ MHz قيمة E فى الفراغ 1.0 V/m عند سطح التقابل و E فى الفراغ تعطى بـ

$$\mathbf{E}(0,t) = 1.0 \sin 2\pi f t\, \mathbf{a}_y \quad \text{V/m}$$

أوجد $\mathbf{H}(z,t)$ لـ $z > 0$.

Example 5.3 A wave is incident at an angle of 30° from air to teflon, $\varepsilon_r = 2.1$. Calculate the angle of transmission and repeat with an interchange of the regions. The permeability of both regions is μ_0.

$$\mathbf{E}(0,t) = 1.0 \sin 2\pi f t\, \mathbf{a}_y \quad \text{V/m}$$

find **H**(z,t) for $z > 0$.

الحل: لـ $z > 0$ وبالصيغة المركبة،

$$\mathbf{E}(z,t) = 1.0 e^{-\alpha z} e^{j(2\pi f t - \beta z)} \mathbf{a}_y \quad \text{V/m}$$

حيث تم اختيار الجزء التخيلى لـ E. داخل الموصل

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi (1.5 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(61.7 \times 10^6)} = 1.91 \times 10^4$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45° = 4.38 \times 10^{-4} e^{j\pi/4} \ \Omega$$

ثم، بما أن $E_y/(-H_x) = \eta$،

$$\mathbf{H}(z,t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} e^{j(2\pi f t - \beta z - \pi/4)} \mathbf{a}_x \quad \text{A/m}$$

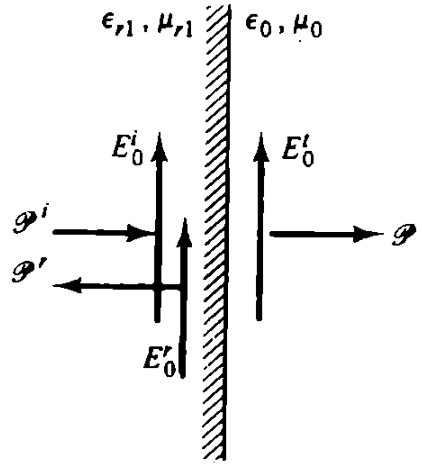
أو بأخذ الجزء التخيلى

$$\mathbf{H}(z,t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} \sin(2\pi f t - \beta z - \pi/4) \mathbf{a}_x \quad \text{A/m}$$

مسألة محلولة 5.4 احسب قيمة الانعكاس والنفاذ لـ E و H عند سطح التقابل المبين بشكل 7-5 إذا كان $\mathbf{E}_0^i = 1.5 \times 10^{-3}$ فى الوسط 1 الذى له

$\varepsilon_{r1} = 8.5$ ، $\mu_1 = 1$ ، $\sigma_1 = 0$ أما الوسط 2 فهو فراغ حر. افرض أن السقوط عمودى.

Solved Problem 5.4 Determine the amplitudes of the reflected and transmitted **E** and **H** at the interface shown in Figure 5-7 if $E_0^i = 1.5 \times 10^{-3}$ in region *1* in which $\varepsilon_{r1} = 8.5, \mu_1 = 1$ and $\sigma_1 = 0$. Region *2* is free space. Assume normal incidence.



شكل 5-7 سقوط عمودى لموجة مستوية

الحل: بحساب معامل الانعكاس ومعامل النفاذ

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r1}}{\epsilon_0\epsilon_{r1}}} = 129\ \Omega \qquad \eta_2 = 120\pi\ \Omega = 377\ \Omega$$

$$E_0^r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_0^i = 7.35 \times 10^{-4}\ \text{V/m}$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_0^i = 2.24 \times 10^{-3}\ \text{V/m}$$

$$H_0^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} = 1.16 \times 10^{-5}\ \text{A/m}$$

$$H_0^r = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} H_0^i = -5.69 \times 10^{-6}\ \text{A/m}$$

$$H_0^t = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} H_0^i = 5.91 \times 10^{-6}\ \text{A/m}$$

الفصل السادس
خطوط النقل
Transmission Lines

فى هذا الفصل:

- ✔ **العناصر الموزعة ونماذج خطوط النقل**
- ✔ **التغذية بجهد جيبى مستقر**
- ✔ **تحليل خريطة سميث**
- ✔ **الموجات العابرة على الخطوط عديمة الفقد**
- ✔ **مسائل محلولة**

الانتشار غير المتوجه للموجات الكهرومغناطيسية تم بحثه فى الفصل 5. فــى هذا الفصل سوف يتم دراسة انتقال الطاقة عندما توجه عن طريق موصلين فى وسط عازل. التحليل الدقيــق لخطـوط النقـل المكونـة مـن موصليـن يتطلـب استخدام نظرية المجالات. ومع ذلك يمكن توقع أداء النظام عن طريق تمثيل خطوط النقل بعناصر موزعة واستخدام الجهود والتيارات المناظرة للمجــالين الكهربى والمغناطيسى. فى مسائل هذا الفصل سيتم فرض أن العنــاصر ثابتـة على طول الخط.

العناصر الموزعة ونماذج خطوط النقل

Distributed Parameters and Transmission Line Models

العناصر المتزايدة الموزعة لوحدة الطـول للخـط هـى المحاثـة Inductance، السعة Capacitance، المقاومة Resistance للموصل، والمواصلة Conductance للوسط العازل. بصفة عامة فإن هذه العناصر تعتمـد علـى الشكـل الهندسـى وخصائص المواد وفى بعض الحالات تعتمد على التردد. فى بيـان الملخـص التالى الاعتماد على الشكل الهندسى ويمكن تمثيل هذا الاعتماد على الشكل بمعامل الشكل Geometrical Factor "GF".

السعـة: $C = \pi\varepsilon_d(\text{GF})$ F/m [$\varepsilon_d =$ الإنفاذية للعازل]

المواصلة: $G = \dfrac{C}{\varepsilon_d}\sigma_d$ S/m [$\sigma_d =$ التوصيلية للعازل]

معامل الحث (الخارجى):

$$L_e = \frac{\mu_d}{\pi}(\text{GF}_\text{L}) \quad \text{H/m}$$ [μ_d السماحية للعازل]

مقاومة التيار المستمر DC (تستعمل حتى حوالى 10 KHz):

$$R_{dc} = \frac{1}{\sigma_c \pi}(\text{GF}_\text{RDC}) \quad \Omega/\text{m}$$ [$\sigma_c =$ التوصيلية للموصل]

مقاومة التيار المتغير AC (تستعمل لأكثر من حوالى 10 KHz):

$$R_{ac} = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}(\text{GF}_\text{RAC}) \quad \Omega/\text{m} \quad \left[\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}} \equiv \text{skin depth}\right]$$

معامل الحث(الداخلى):

$$L_i = \begin{cases} R_{ac}/2\pi f & \text{H/m} \quad \text{for} \quad f > 10\,\text{kHz} \\ \mu_0/4\pi & \text{H/m} \quad \text{for} \quad f < 10\,\text{kHz} \end{cases}$$

معامل الحث الكلى: $L_t = L_e + L_i \approx L_e$ لمعظم التطبيقات العملية.

معامل الشكل لخطوط النقل الثلاثة المعروفة هو كما يلى:

كابل محورى (نصف القطر الداخلى a، والخارجى b، سُمك الموصل الخارجى t):

$$GF_C = \frac{2}{\ln(b/a)}, \qquad GF_L = \frac{1}{GF_C}$$

$$GF_{RDC} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{t(b+t)}, \qquad GF_{RAC} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{for} \quad t >> \delta$$

خط نقل ذو سلكين متوازيين (نصف القطر a، المسافة بينهما d):

$$GF_C = \frac{1}{GF_L}, \qquad GF_L = \cosh^{-1}\frac{d}{2a} \approx \ln\frac{d}{a} \quad \text{for} \quad d >> a$$

$$GF_{RDC} = \frac{2}{a^2}, \qquad GF_{RAC} = \frac{2}{a}$$

لوحين متوازيين (عرض اللوح ω وسُمكه t والمسافة بين اللوحين d)

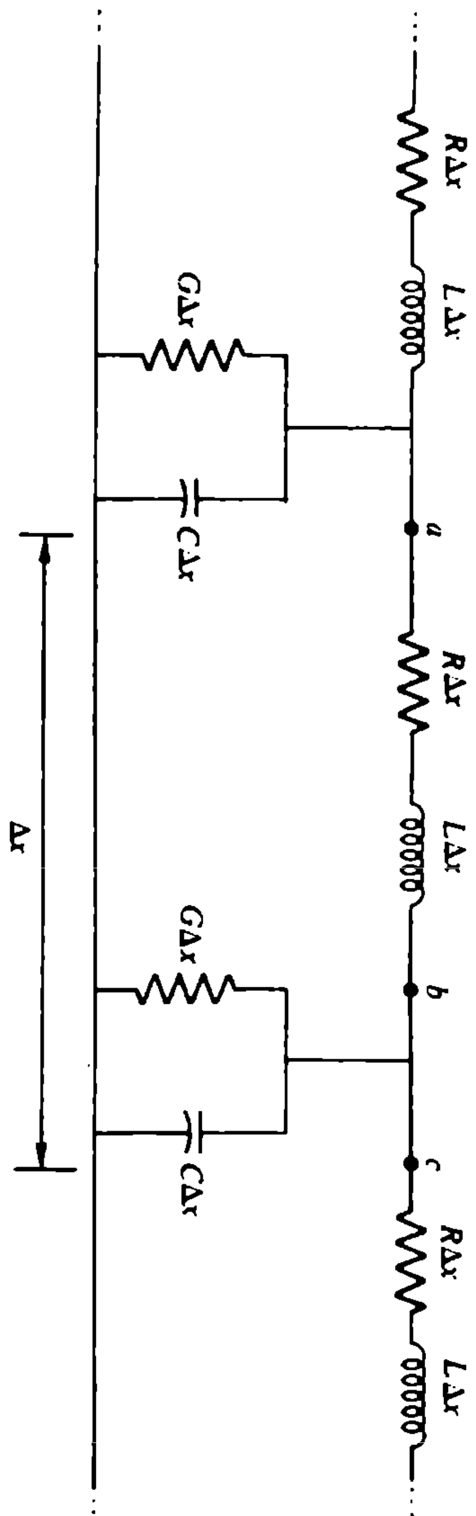
$$GF_C = \frac{w}{\pi d}, \qquad GF_L = \frac{1}{GF_C}$$

$$GF_{RDC} = \frac{2\pi}{wt}, \qquad GF_{RAC} = \frac{4\pi}{w} \quad \text{for} \quad t >> \delta$$

النموذج للخط مبين بشكل 1-6، حيث R، L، G، C كما هو معطى أعلاه، يسمح النموذج لتحليل الخط باستخدام الجهود والتيارات. الجهد عبر الخط لشريحة طولها Δx عند النقطتين a، b يتغير عن طريق

$$\Delta v(x,t) = (R\Delta x)\,i(x,t) + (L\Delta x)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

عندما $\Delta x \to 0$ تصبح المعادلة



شكل 6-1 نموذج دائرة لخط نقل

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

بالمثل التيار عند النقطة c يتغير عن b عن طريق

$$\Delta i(x,t) = (G\Delta x)\, v(x,t) + (C\Delta x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

والذى يعطى بعد أخذ $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G\, v(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \qquad (2)$$

المعادلة (1) و (2) هى معادلات خط النقل. من المعادلة (1) و (2) يمكن استنتاج مجموعة من معادلات الدرجة الثانية

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = RG\, f(x,t) + (RC + LG)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \qquad (3)$$

حيث $f(x,t)$ = إما $i(x,t)$ أو $v(x,t)$. الآن المعادلة (3) من الدوال الزائدية مثل المعادلة الموجية. لخط نقل عديم الفقد $(R = G = 0)$، المعادلة (3) هى معادلة موجية مقياسية أحادية البعد مثل التى سبق دراستها فى فصل 5. على ذلك يكون معرفًا مسبقًا أن خطوط النقل تساند موجات الجهد والتيار والتى يمكن أن ترتد أو تنتشر عند نقاط عدم الاستمرارية على الخط (مواقع يحدث عندها تغير فجائى فى العناصر).

التغذية بجهد جيبى مستقر

Sinusoidal Steady State Excitation

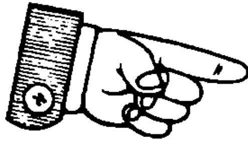
عند تغذية خط نقل كالمبين بشكل 1-6 لمدة طويلة بمنبع جيبى (له تردد زاوى ω) يصبح الجهد والتيار أيضًا لهما تغير جيبى بنفس التردد:

$$v(x,t) = \text{Re}[\hat{V}(x)e^{j\omega t}], \qquad i(x,t) = \text{Re}[\hat{I}(x)e^{j\omega t}]$$

هنا الأطوار $\hat{I}(x)$ و $\hat{V}(x)$ تكون بصفة عامة قيمًا مركبة وكثيرًا ما تكتب على الصورة القطبية (مع إخفاء الاعتماد على x) مثل

$$\hat{V} = \left|\hat{V}\right| \angle\phi_V, \qquad \hat{I} = \left|\hat{I}\right| \angle\phi_I$$

حيث ϕ الزاوية بين الطور المركب والمحور الحقيقى. يمكن تبسيط تحليل خط النقل تحت التغذية المستقرة عندما تستبدل الجهود والتيارات بقيم الطور المناظر.



شكل 2-6 يبين نموذج لخط منتظم طوله ℓ وينتهى (قيم مركبة) بحمل معاوقته Z_R عند جهة الاستقبال ويغذى من جهة الإرسال بمنبع له معاوقة داخلية Z_g وطور الجهد $\hat{V}_g = V_{gm} \angle\theta$. معاوقة التوالى ومسامحة التوازى لوحدة الطول للخط تعطى كما يلى

$$Z = R + j\omega L, \qquad Y = G + j\omega C$$

ملاحظة!

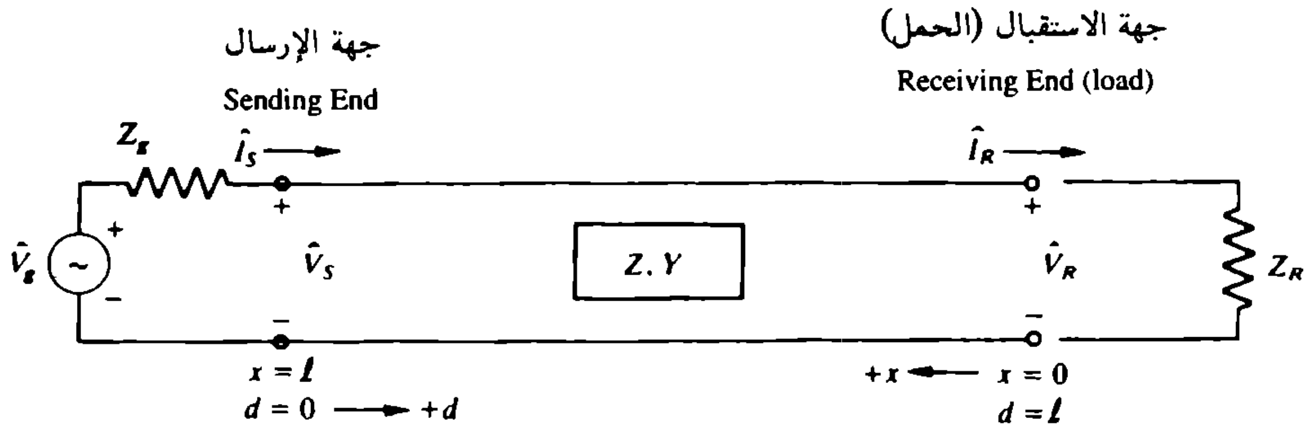
المسافة من جهة الاستقبال تقاس بالمتغير x؛ ومن جهة الإرسال بـ d. هذا الاختيار سيطبق خلال هذا الفصل.

باستخدام التحليل الطورى تصبح المعادلات (1)، (2)، (3) معادلات تفاضلية لـ $\hat{V}$ و $\hat{I}$.

$$\frac{d\hat{V}(x)}{dx} = Z\,\hat{I}(x) \qquad (4)$$

$$\frac{d\hat{I}(x)}{dx} = Y\,\hat{V}(x) \qquad (5)$$

$$\frac{d^2\hat{F}(x)}{dx^2} = \gamma^2\,\hat{F}(x) \qquad (6)$$



شكل 2-6 تغذية جيبية لخط النقل

حيث $\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$ ويختار الجذر التربيعى لتكون α و β غير سـالبة. المعادلة (6) مطابقة فى الشكل لمعادلة الموجة المستوية (فصل 5). ولها حل على صورة موجة منتشرة (x المسافة المقاسة من الحمل)

$$\hat{V}(x) = \hat{V}^+ e^{\gamma x} + \hat{V}^- e^{-\gamma x} \equiv \hat{V}_{inc}(x) + \hat{V}_{refl}(x)$$
$$\hat{I}(x) = \hat{I}^+ e^{\gamma x} + \hat{I}^- e^{-\gamma x} \equiv \hat{I}_{inc}(x) + \hat{I}_{refl}(x)$$

المعاملات $\hat{V}^+$، $\hat{V}^-$ تكون أطواراً مركبة لا تعتمد على x وهناك علاقة بين هذه المعاملات عن طريق المعاوقة الذاتية z_0 ومعامل الانعكاس عند الحدود Γ_R ويُعَرفان كما يلى

$$Z_0 \equiv \frac{\hat{V}^+}{\hat{I}^+} = -\frac{\hat{V}^-}{\hat{I}^-} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$
$$\Gamma_R \equiv \frac{\hat{V}^-}{\hat{V}^+} = -\frac{\hat{I}^-}{\hat{I}^+} = \frac{\hat{V}_{refl}(0)}{\hat{V}_{inc}(0)}$$

من السهل التعبير عن Γ_R بدلالة المعاوقة المميزة ومعاوقة الحمل

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

ثم، عند تعريف معامل الانعكاس عند نقطة معينة بالآتى

$$\Gamma(x) = \frac{\hat{V}_{refl}(x)}{\hat{V}_{inc}(x)}$$

فإنه

$$\Gamma(x) = \Gamma_R\, e^{-2\gamma x} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2\gamma x}$$

بالمثل إذا كان $Z(x) = \hat{V}(x)/\hat{I}(x)$ هى المعاوقة عند نقطة ناظراً فى اتجاه جهة الاستقبال $x = 0$، لذلك

$$Z(x) = Z_0 \frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}$$

الشروط من جهة الإرسال (مرة ثانية، تستخدم x كتعبير عن المسافة وتقاس من جهة الاستقبال) هى

$$Z_S \equiv Z(\ell) = Z_0 \frac{1+\Gamma(\ell)}{1-\Gamma(\ell)}$$

$$\hat{V}_S = \hat{V}_g \frac{Z_S}{Z_S + Z_g}$$

$$\hat{I}_S = \frac{\hat{V}_S}{Z_S}$$

القدرة المتوسطة التى يستقبلها الحمل والقدرة المتوسطة المرسلة من جهة الإرسال تكون حساباتها كالآتى:

$$P_R = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{V}_R \hat{I}_R^*\right) = \tfrac{1}{2}\left|\hat{I}_R\right|^2 \mathrm{Re}(Z_R)$$
$$= P_{inc}(x=0) - P_{refl}(x=0)$$
$$P_S = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{V}_S \hat{I}_S^*\right) = \tfrac{1}{2}\left|\hat{I}_S\right|^2 \mathrm{Re}(Z_S)$$

عند الترددات التى عندها $R << \omega L$ و $G << \omega C$ (أى تردد أكبر من 1 MHz).

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$$

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} \approx \left(\frac{R}{2R_0} + \frac{GR_0}{2}\right) + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta$$

$$u \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

لخط مثالى عديم الفقد $(R = G = 0)$ يكون مقياس معامل الانعكاس ثابت القيمة

$$\Gamma(x)=\Gamma_R e^{-j2\beta x}=\left|\frac{Z_R-R_0}{Z_R+R_0}\right|\angle(\phi_R-2\beta x)$$

حيث ϕ_R هى زاوية Γ_R. يُعطى الجهد بما يلى

$$\hat{V}(x)=\hat{V}^{+}[1+\Gamma_R\angle(-2\beta x)]$$

والتى تتضمن

$$\left|\hat{V}\right|_{max}=\left|\hat{V}^{+}\right|(1+|\Gamma_R|),\qquad \left|\hat{V}\right|_{min}=\left|\hat{V}^{+}\right|(1-|\Gamma_R|)$$

المسافة بين قيمة عظمى للجهد تتبعها قيمة صغرى هى $\beta x = 90°$ أى ربع طول الموجة

✓ يجب أن تعرف

للموجة الكلية تُعَرف نسبة الموجة الواقفة للجهد، VSWR بالآتى

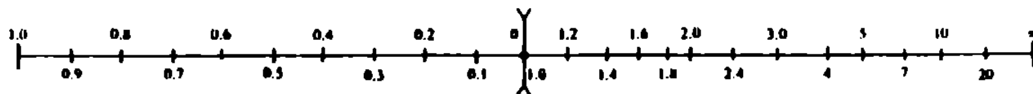
$$VSWR=\frac{|\hat{V}|_{max}}{|\hat{V}|_{min}}=\frac{1+|\Gamma_R|}{1-|\Gamma_R|}$$

تحليل خريطة سميث Smith Chart Analysis

خريطة سميث (شكل 3-6) هى خريطة تخطيطية تساعد فى حل مسائل خطوط التردد العالى. الخريطة فى جوهرها تخطيط على الصورة القطبية لمعامل الانعكاس بدلالة المعاوقة النسبية $z(x)$:

$$z(x)\equiv\frac{Z(x)}{R_0}=r(x)+j\chi(x)=\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}$$

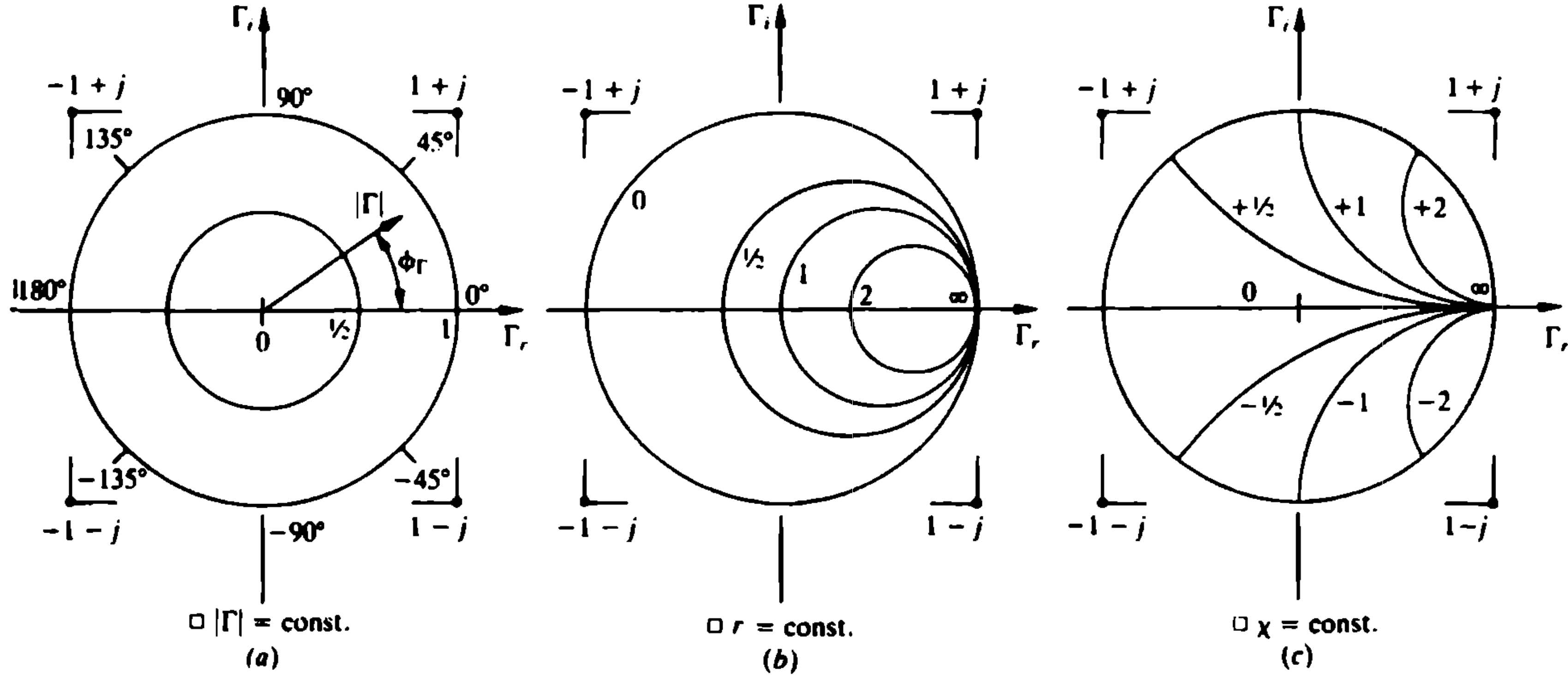
Radial scales



نسبة الموجة الواقفة للجهد المقياسى
لقياس VSWR على مقياس
$R > 1$

قيمة معامل الانعكاس
التقسيم الخطى لـ Γ
من 0 حتى 1.0

شكل 6-3 خريطة سميث



شكل 6-4 دوائر القيم الثابتة لخريطة سميث

$$\Gamma(x) = \Gamma_R \angle(-2\beta x) = \left|\frac{r_0 + j\chi_0 - 1}{r_0 + j\chi_0 + 1}\right| \angle(\phi_R - 2\beta x) \equiv \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (\text{for } \alpha = 0)$$

حيث $r_0 = r(0)$ و $\chi_0 = \chi(0)$. فى مستوى معامل الانعكاس المركب Γ، المنحنيات لقيم Γ الثابتة هى دوائر [شكل (a) 6-4]. منحنيات قيم r الثابتة أيضًا دوائر [شكل (b) 6-4]. منحنيات القيم χ الثابتة هى أقواس دائرية [شكل (c) 6-4]. جدول 6-1 يبين بعض النقاط الهامة على خريطة سميث.

جدول 6-1 القيم الهامة على خريطة سميث

حالة الخط	Γ	r	χ
دائرة ـ مفتوحة	$1\angle 0^\circ$	∞ (قيمة اختيارية)	قيمة اختيارية (∞)
دائرة ـ قصر	$1\angle 180^\circ$	0	0
خط منتهى بمفاعلة بحتة	$1\angle \pm 90^\circ$	0	±1
خط متوافق	0	1	0

يمكن الحصول على الخريطة الكاملة لسميث المبينة بشكل 6-3 عن طريق انطباق شكل (b) 6-4 وشكل (c) 6-4. الدوائر الخاصة بثبوت $|\Gamma|$ غير ظاهرة وبدلاً من ذلك فإن قيم $|\Gamma|$ التى تناظر (r, χ) تقرأ من على التدريج الممتد ناحية اليد اليسرى. قيمة VSWR تقرأ من على التدريج الممتد جهة اليد اليمنى. التدريجان على المحيط الخارجى خاصان بالمسافة منسوبة إلى طول الموجة.

ملاحظة!

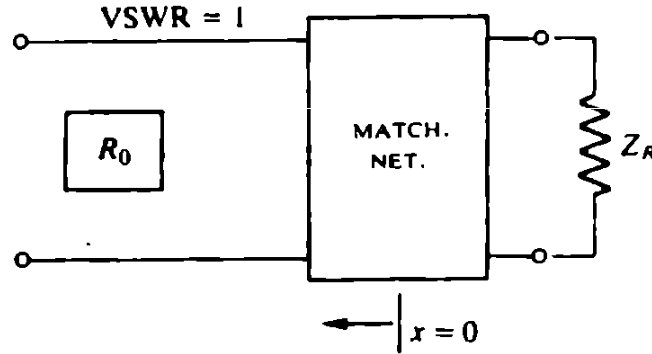
التدريج الخارجى يبدأ من $(r, \chi) = (0,0)$ ويتحرك فى اتجاه المنبع مع اتجاه عقارب الساعة (هذا يعنى قياس x/λ)، والتدريج الداخلى فى اتجاه الحمل عكس عقارب الساعة (هذا يعنى قياس d/λ).

الدورة الكاملة حول خريطة تمثل نصف طول الموجة. التدريج الثالث على المحيط الخارجي يعطى زاوية معامل الانعكاس $\phi_\Gamma = \phi_R - 2\beta x$.

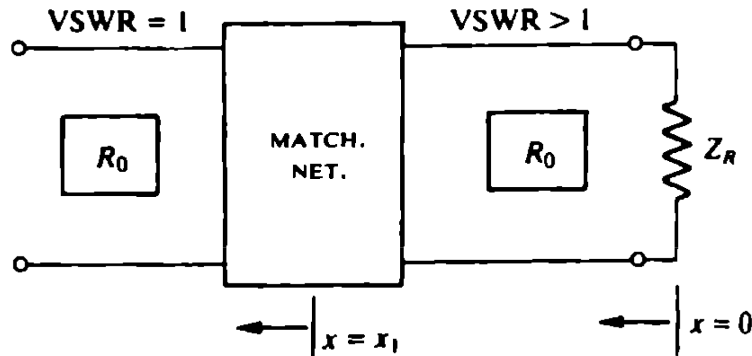
يمكن استخدام الخريطة أيضًا للمسامحة النسبية

$$y(x) \equiv Y(x)\, R_0 = g(x) + jb(x)$$

حيث دوائر r تستخدم لـ g، وأقواس x تستخدم لـ b، زاوية Γ لقيمة معطاة لـ y تكون $\theta_\Gamma + 180°$، ونقطة $y = 0 + j0$ هى حالة دائرة مفتوحة. عند الترددات العالية يكون من الضرورى تشغيل الخط عند أقل VSWR (القيمة المثلى هى VSWR = 1). يمكن استعمال طرق كثيرة لموائمة الحمل Z_R للخط، أو لموائمة خطوط متصلة على التعاقب وكل خط له معاوقة مميزة مختلفة. دوائر الموائمة يمكن أن توضع عند الحمل $(x = 0)$ أو عند بعض الأماكن على الخط $x = x_1$، كما بالشكل 6-5.



(a)



(b)

شكل 6-5 نظم دوائر الموائمة Matching Network

تكون الشروط النسبية فى المجموعتين كما يلى (شكل 6-5)

(a) قبل الموائمة: $z(0) = z_R = r_0 + jx_0; y(0) = g_0 + jb_0; VSWR > 1$

بعد الموائمة: $z(0) = 1 + j0; y(0) = 1 + j0; VSWR = 1$

(b) عند الحمل: $z(0) = r_0 + jx_0; y(0) = g_0 + jb_0; VSWR(0) > 1$

قبل الموائمة: $z(x_1) = r_1 + jx_1; y(x_1) = g_1 + jb_1; VSWR = VSWR(0)$

بعد الموائمة: $z(x_1) = 1 + j0; y(x_1) = 1 + j0; VSWR = 1$

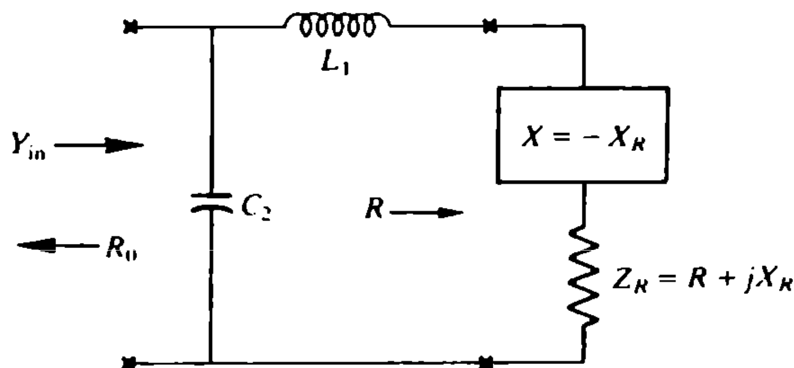
يمكن أن تصنع دوائر الموائمة لترددات (الراديو) المنخفضة من عناصر مُفاعلة مجمعة قليلة الفقد، شكل 6-6 يبين دائرة مجمعة مكونة من دوائر L-C. إذا كانت Z_R لها مركبة مُفاعلة ففى هذه الحالة توصل ممانعة بالتوالى لها نفس المفاعلة ولكن بإشارة مخالفة بحيث تكون $Z'_R = R + j0$. ثم لموائمة الخط

$$Y_{in} = j\omega C_2 + \frac{1}{R + j\omega L_1} = \frac{1}{R_0}$$

أو

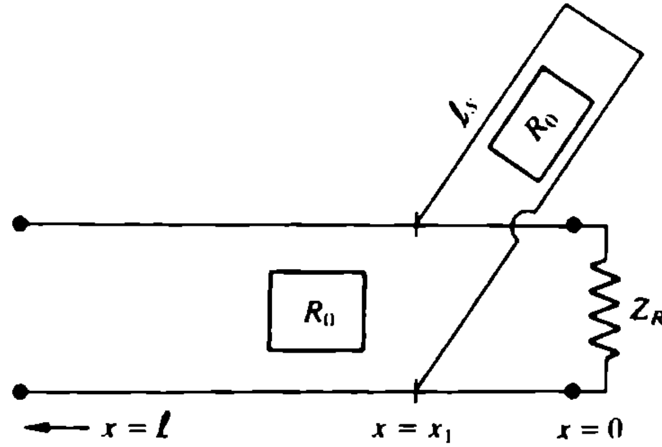
$$L_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{R(R_0 - R)} \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{L_1}{R\,R_0}$$

إذا كان $R > R_0$ فإن المكثف يجب أن يوصل على الناحية الأخرى من الملف.



شكل 6-6 الموائمة باستخدام عناصر مُفاعلة

لتقليل الفقد عند الترددات العالية يستخدم جزء من خط بطول معين ويكـون مفتوحًا أو مقصوراً عند نهايته وذلك لموائمة الخط الرئيسي. للوصــول إلـى ذلك يمكن اســتخدام موائمـة فرديـة. الشكـل الهندسـى المبيـن بشكـل 6-7 يستخدم موائمة فردية مقصورة.



شكل 6-7 موائمة فردية

للحصول على الموائمة

(1) أوجد x_1 بحيث $y(x_s) = 1 + jb_1$.

(2) أوجد ℓ_s بحيث $y(\ell_s) = 0 - jb_1$.

بعد الموائمة، $y(x_1) = 1 + j0$ و VSWR = 1 من x_1 حتى ℓ.

مثال 6.1 الخطوتان أعلاه للموائمة الفردية يمكن الحصول عليهما باستخدام خريطة سميث.

Example 6-1 The above two steps for single-stub matching may be accomplished using a Smith chart.

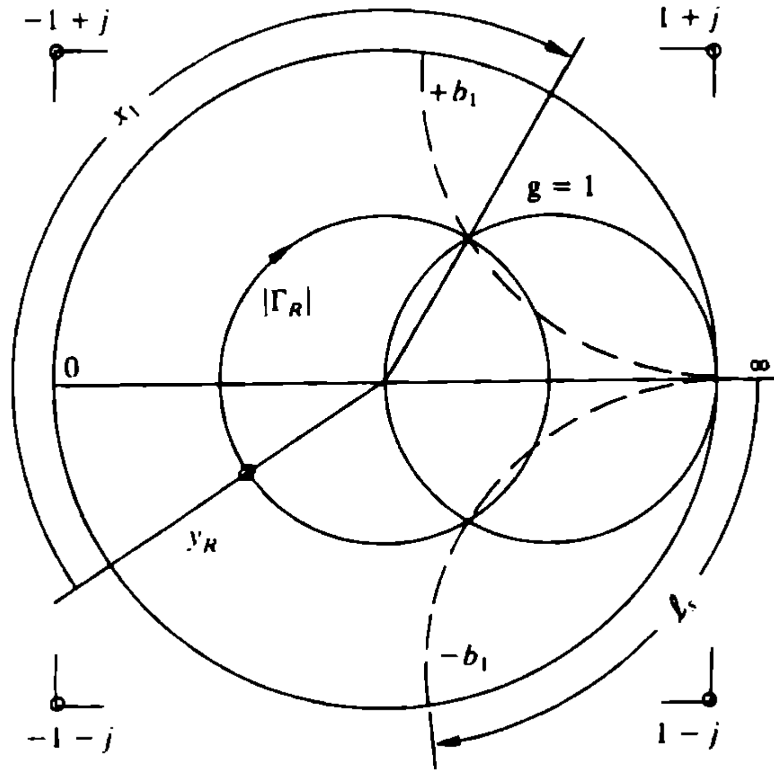
الحل: انظر شكل 6-8.

i. ضع y_R على الخريطة ثم ارسم دائرة $|\Gamma_R|$ [أو (0) VSWR].

ii. حدد نقطة تقاطع دائرة $|\Gamma_R|$ مع دائرة $g = 1$.

iii. من y_R تحرك فى اتجـاه المنبـع إلـى أول تقـاطع، اقـرأ $y_1 = 1 + jb_1$ وسجل المسافة x_1 بدلالة طول الموجة.

iv. حدد النقطة $y_1 = 0 - jb_1$ على دائرة $|\Gamma|$ من وضع القصر $y = \infty$، تحـرك فى اتجاه المنبع حتى النقطة $y = -jb_1$. سجل المسافة ℓ_s بدلالـة طـول الموجة. إذا كان أول تقاطع لا يمكن الوصول إليه ففى هـذه الحالـة يمكن استخدام التقاطع الثانى مع عمل التعديل علـى طـول الموائمـة للمفاعلة للوضع الجديد.

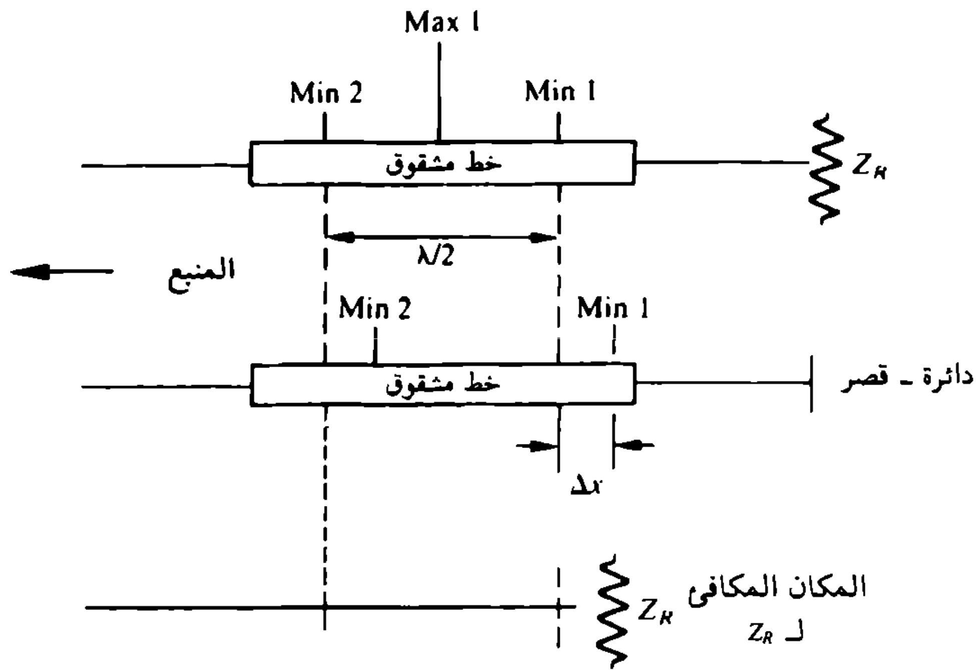


شكل 8-6 استخدام خريطة سميث مع موائمة فردية

يستخدم الخط المشقوق Slotted Line لكابل محورى عند الترددات العالية لقياس VSWR ولتحديد مواقع أقل قيمة للجهد. مع الاستعانة بخريطة سميث يمكن بسهولة إيجـاد المعاوقـة المجهولـة للحمـل وذلـك عـن طريـق معرفـة

VSWR والمسافة بين أقل جهد فى حالة وجود الحمل وأقل جهد فى حالة وجود دائرة مقصورة جهة الاستقبال (جهد الإسناد).

فى شكل 9-6 يوضع الخط المشقوق فى مكان مناسب ويوصل Z_R فى مكانها ثم يُحرك مَجَس Probe على الخط لمعرفة قيمة ومواقع أقل وأكبر جهد. يوصل مكبر وجهاز بيان لتحويل خرج المجس إلى قراءة لـ VSWR. بعد عمل دائرة قصر بدلاً من Z_R يمكن معرفة أقل جهد إسناد فى هذه الحالة تكون VSWR عالية جدًا. كما هو متوقع فإن المسافة بين أكبر وأقل قيمة للجهد تكون $\lambda/4$.



شكل 9-6 استخدام الخط المشقوق Slotted Line لقياس Z_R.

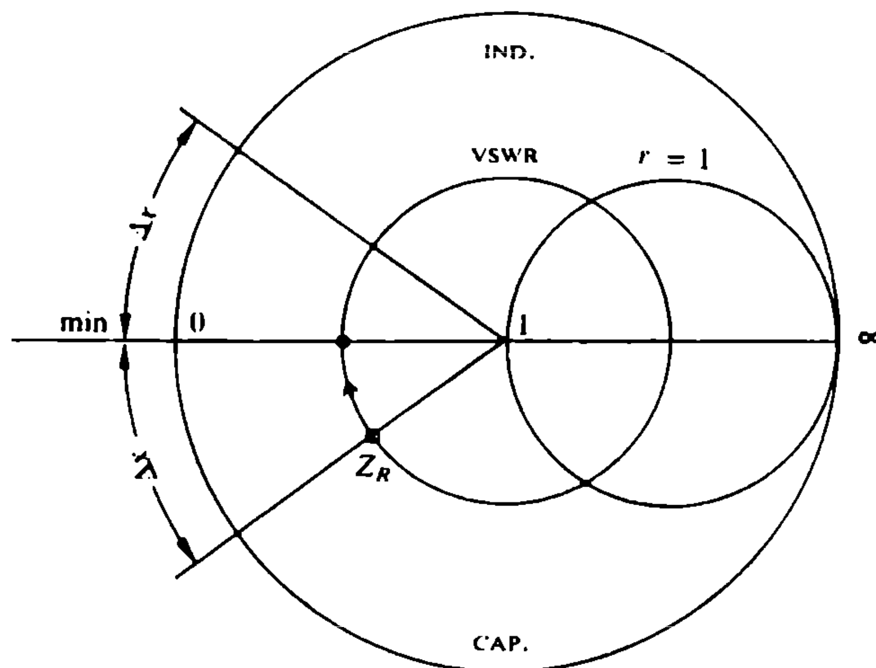
لمعرفة z_R باستخدام خريطة سميث، ارسم دائرة VSWR الذى سبق قياسه شكل 10-6 ثم حدد نقطة أقل جهد (من 0 إلى 1 على خط $x = 0$). ثم حول القيمة Δx المقاسة إلى قيمتها بدلالة طول الموجة (انظر شكل 9-6) حدد النقطة على دائرة VSWR والتى تبعد Δx من خط V_{min} (أقل جهد). z_R الصحيحة تكون ممانعة سعوية، يلاحظ أنه إذا تحركنا من z_R فى اتجاه

المنبع مسافة مقدارها Δx نحصـــل علـى نقطـة أقـل جـهد. (إذا كـانت z_R ممانعة تأثيرية تكون Δx أكبر من ربع طول الموجة وأن نقطـة أكـبر جـهد V_{max} سوف تأتى قبل نقطة أقل جهد V_{min}).

الموجات العابرة على الخطوط عديمة الفقد

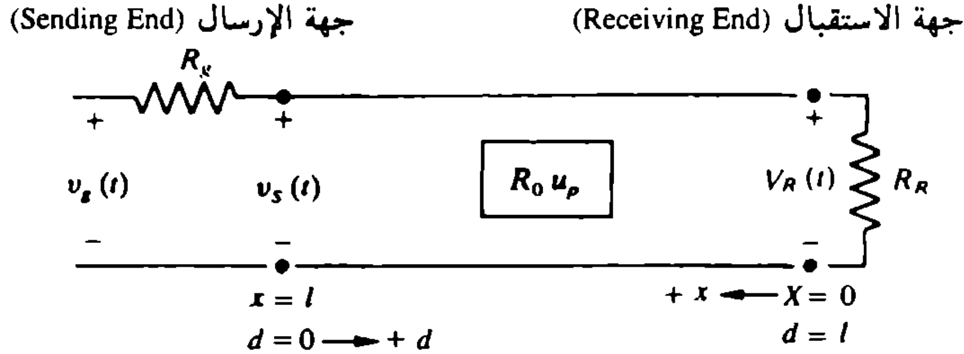
Transients in Lossless Lines

فى حالات فتح وغلق الخط وعمليات إرسال نبضات، يحــدث تغـير مفـاجئ للجهد يُسلط على جزء من الخط. تحليل هذه الحالة العابرة يتطلـب عمومًـا الاسـتعانة بالمعـادلات التفاضليـة الجزئيـة PDEs أو بـالتحويل اللابلاسـى Laplace Transforms لهذه المعادلات. مع هذا ففى الحالة الخاصة لخط عديم الفقد $(R = G = 0)$ $R_0 = \sqrt{L/C}$ والسرعة $u_p = 1/\sqrt{LC}$، تكون هناك طريقة بسيطة بالرسم أساسها تراكب الموجات المنعكسة المتكررة.



شكل 6-10 إيجاد معاوقة مجهولة

شكل 6-11 يبين نموذج لنظام عديم الفقد يوصل عليه جـهد التغذيـة $v_g(t)$ عند $t = 0$ حيث R_g هى مقاومة المنبع.



شكل 6-11 خط نقل عديم الفقد

الآن فى حالة حدوث أى تغير مفاجئ عند أى من نـهايتى الخـط فـإن ذلـك يؤثر على النهاية الأخرى بعد مرور زمن تعويق Delay Time قـدره $t_D = l/u_p$. إذا كان الحمل غير موائم للخط $(R_R \neq R_0)$ فإن انعكاسًا سوف يحـدث عنـد جهة الاستقبال. بالمثل إذا انتشرت موجة فى اتجاه $+x$ سوف يحدث انعكاس أيضًا عند جهة الإرسال إذا كان المنبع غير موائم للخط $(R_g \neq R_0)$.

مثال 6.2 فى حالة ما إذا كان $v_g(t)$ مقداره 10 V عند $t = 0$ (أى جهد تيار مستمر) وكان الخط متوائم من الجهتين $(R_R = R_R = R_0)$ أوجد الجهد العـابر على الخط.

Example 6-2 For the case where $v_g(t)$ is a 10-V step at $t = 0$ (i.e., a dc voltage) and where the line is matched at both ends ($R_R = R_g = R_0$), evaluate the transient voltage on the line.

الحل: شروط الجهد العابر مبينة بشكل 6-12، الذى يبيـن تخطيـط زمـن - مسافة. حيث أن جهد المنبع ثابت ولا يوجد انعكاس عند جهة الاســتقبال فإن النظام يصل إلى الحالة المستقرة $V(d,t) = 5$ V بعد زمن تعويـق واحـد قدره t_D.

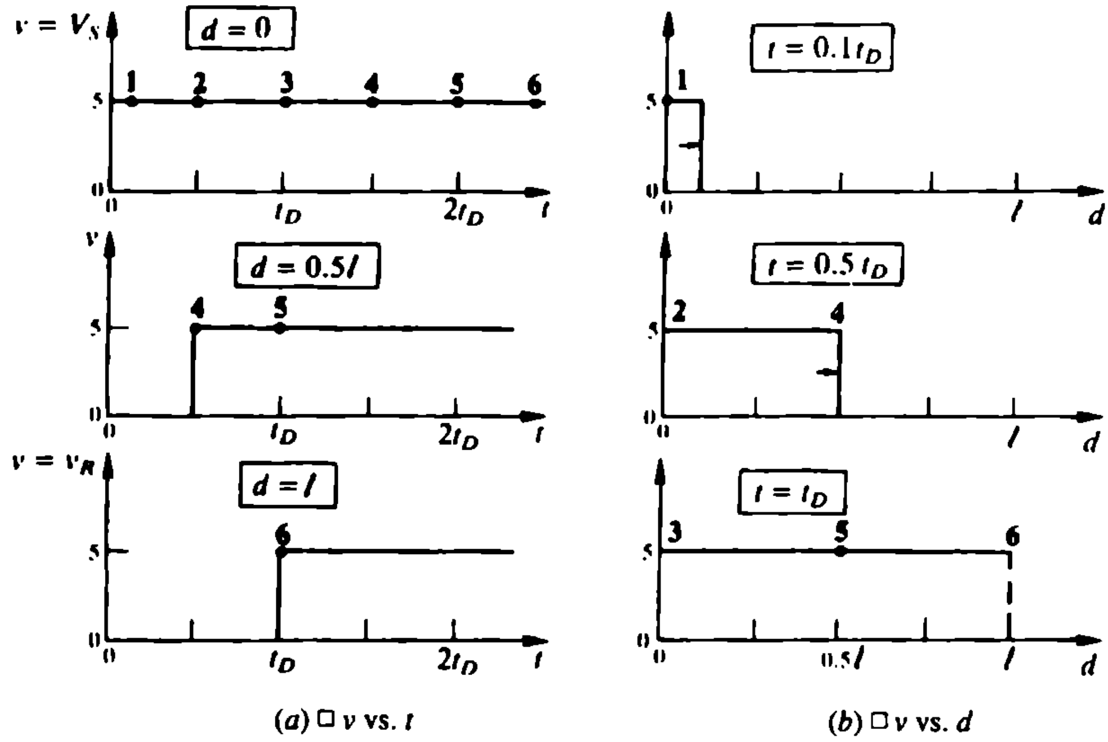
مثال 6.3 افرض أن كل المعطيات للخط بمثال 6.2 كما هى مع اختلاف أن الحمل أصبح الآن دائرة مفتوحة ($R_R = \infty$). أوجد الجهد العابر على الخط.

Example 6-3 Assume that everything is as in Example 6-2 with the exception of the load, which is now an open circuit ($R_R = \infty$). Evaluate the transient voltage on the line.

الحل: شكل 6-13 يعطى تخطيط العلاقة بين الزمن والمسافة. معامل الانعكاس للحمل $\Gamma_R = 1$. بسبب وجود انعكاس واحد من جهة الحمل نحصل على حالة مستقرة من الجهد مقداره 10 V بعد زمن قدره $2t_D$.

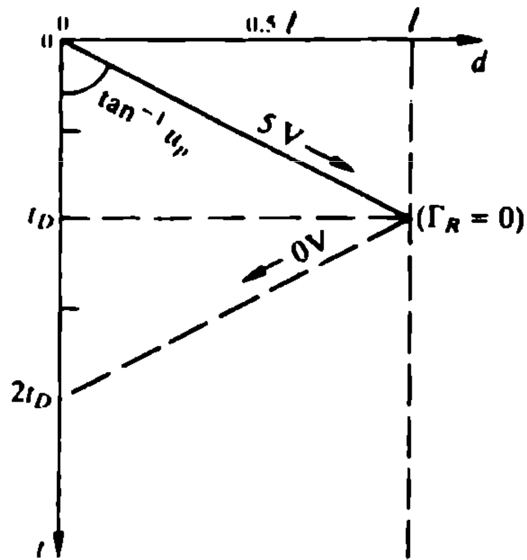
أشياء هامة للتذكر

- ✔ تتيح خطوط النقل توجيه انتشار الطاقة.
- ✔ فى تحليل خطوط النقل تكون الجهود والتيارات دوال فى كل من الزمن والمسافة.
- ✔ الموجات الواقفة تنشأ عندما يكون معامل الانعكاس لا يساوى الصفر.
- ✔ خريطة سميث يمكن استخدامها للمساعدة فى حل مسائل خطوط النقل عند التردد العالى.
- ✔ فى الحالات العابرة، إذا حدث تغير مفاجئ عند المنبع لخط نقل لن يحدث أى تغير فى جهة الحمل إلا بعد مرور زمن تعويق واحد على الأقل.



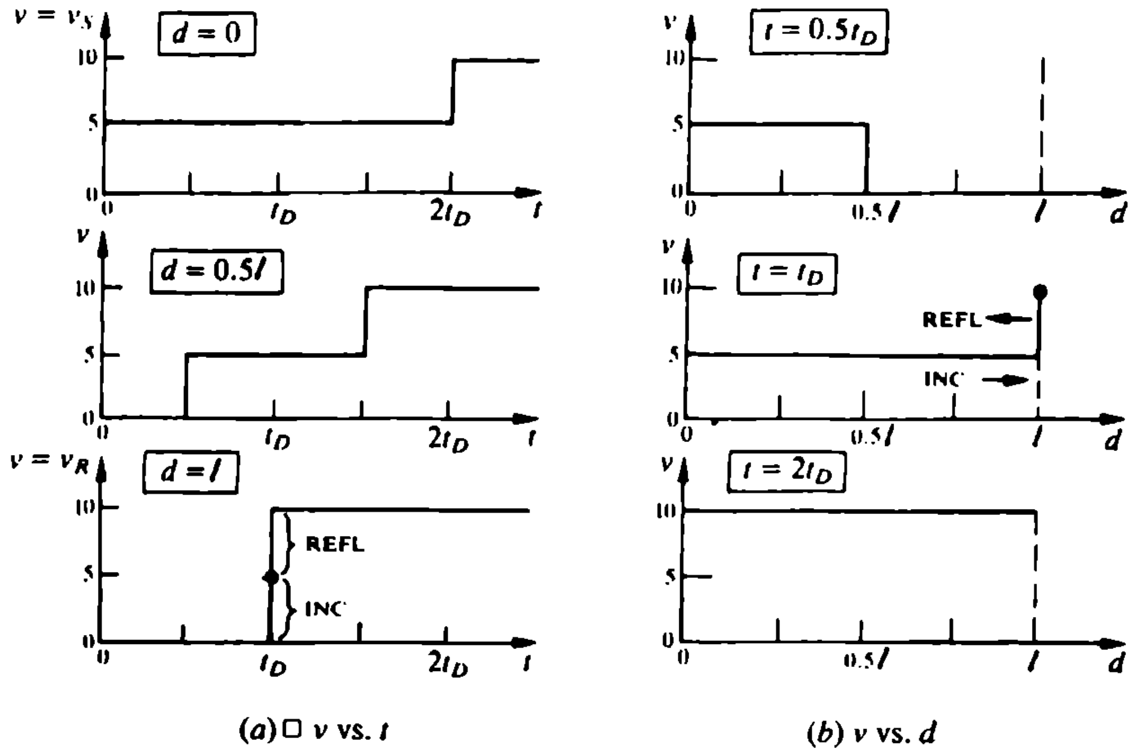
(a) □ v vs. t

(b) □ v vs. d



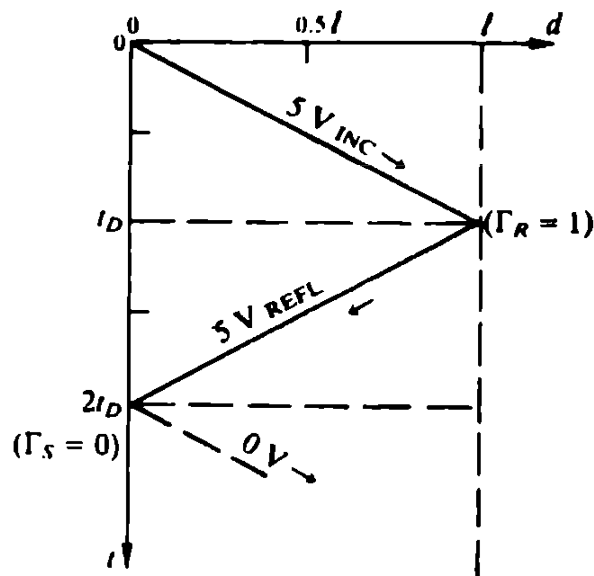
(c) □ t-d plot

شكل 6-12 التحليل العابر لخط موائم



(a) □ v vs. t

(b) v vs. d



(c) □ t-d plot

شكل 6-13 التحليل العابر عندما ($R_R = \infty$)

مسألة محلولة 6.1 خط نقل يتكون من سلكين متوازيين والسلك مصنوع من النحاس #6 AWG (القطر = 0.162 inch، $\sigma_2 = 5.8 \times 10^7$ S/m) المسافة بين السلكين 12 inch والهواء هو العازل بينهما. أهمل معامل الحث الداخلى، احسب لكل متر قيم L، C، G ومقاومة التيار المستمر والمقاومة للتيار المتغير عند 1 MHz.

Solved Problem 6.1 A parallel-wire transmission line is constructed of #6 AWG copper wire (dia. = 0.162 in., $\sigma_c = 5.8\times10^7$ S/m) with a 12-inch separation in air. Neglecting internal inductance, find the per-meter values of L, C, G, the dc resistance and the ac resistance at 1 MHz.

الحل: معاملات الشكل الأربعة لسلكين متوازيين لخط نقل تتضمن نصف قطر الموصل $a = 2.06 \times 10^{-3}$ m والمسافة بين السلكين $d = 0.305$ m. حيث $d >> a$

$$\text{GF}_\text{L} = \ln\left(\frac{d}{a}\right) = 5.0 \qquad \text{GF}_\text{C} = \frac{1}{\text{GF}_\text{L}} = 0.20$$

$$\text{GF}_\text{RDC} = \frac{2}{a^2} = 4.72\times10^5 \text{ m}^{-2} \qquad \text{GF}_\text{RAC} = \frac{2}{a} = 971 \text{ m}^{-1}$$

للهواء العازل $\mu_d = \mu_o$ و $\varepsilon_d = \varepsilon_o$ و $\sigma_d = 0$. للنحاس $\mu_c = \mu_o$. على ذلك تكون عناصر خط النقل

$$L = \frac{\mu_d}{\pi}(\text{GF}_\text{L}) = 2.0\ \mu\text{H/m} \qquad R_{dc} = \frac{1}{\sigma_c \pi}(\text{GF}_\text{RDC}) = 2.59\times10^{-3}\ \Omega/\text{m}$$

$$C = \pi\varepsilon_d(\text{GF}_\text{C}) = 5.56 \text{ pF/m} \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}} = 66\ \mu\text{m}$$

$$G = 0 \text{ S/m} \qquad R_{ac} = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}(\text{GF}_\text{RAC}) = 4.04\times10^{-2}\ \ \Omega/\text{m}$$

مسألة محلولة 6.2 لخط النقل المكون من سلكين الموضح بمسألة 6.1 أوجد المعاوقة الذاتية وثابت الانتشار (توهين Attenuation وزاوية طور Phase Shift) وسرعة الانتشار وطول الموجة إذا كان $f = 5$ KHz.

Solved Problem 6.2 For the parallel-wire line of problem 6.1, find the characteristic impedance, propagation constant (attenuation and phase shift), velocity of propagation and wavelength for $f = 5$ kHz.

الحل: عند 5 KHz يمكن استخدام مقاومة التيار المستمر.

$$Z = R + j\omega L = 2.59\times10^{-3} + j(2\pi)(5000)(2\times10^{-6})$$
$$= 6.29\times10^{-2}\angle 87.6^\circ \quad \Omega/\text{m}$$

$$Y = G + j\omega C = j(2\pi)(5000)(5.56\times10^{-12}) = 1.747\times10^{-7}\angle 90^\circ \quad \text{S/m}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = 600\angle -1.2^\circ \quad \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = 1.048\times10^{-4}\angle 88.8^\circ = (2.19\times10^{-6}) + j(1.048\times10^{-4}) \quad \text{m}^{-1}$$

على ذلك

$$\alpha = 2.19\times10^{-6} \quad \text{Np/m}, \beta = 1.048\times10^{-4} \quad \text{rad/m},$$
$$u_p = \omega/\beta = 2.998\times10^{8} \quad \text{m/s}$$
$$\text{and } \lambda = 2\pi/\beta = 59.96 \quad \text{km}.$$

مسألة محلولة 6.3 خط نقل 70 Ω يستخدم عند تردد له $\lambda = 80$ cm مع وجود حمل عند $x = 0$ قيمته $(140 + j91)\ \Omega$. استخدم خريطة سميث لإيجاد Γ_R و VSWR والمسافة بين الحمل وأول موقع لأقصى جهد والمسافة بين الحمل وأول موقع لأقل جهد والمعاوقة عند V_{max} والمعاوقة عند V_{min} ومعاوقة الدخل لجزء من الخط طوله 54 cm، ومسامحة الدخل للخط عندما يتصل الحمل.

Solved Problem 6.3 A 70-Ω transmission line is used at a frequency where $\lambda = 80$ cm with a load at $x = 0$ of $(140+j91)\ \Omega$. Use the Smith Chart to find Γ_R, *VSWR*, distance to the first voltage maximum from the load, distance to the first voltage minimum from the load, the impedance at V_{max}, the impedance at V_{min}, the input impedance for a section of the line that is 54 cm long, and the input admittance of that line with the load attached.

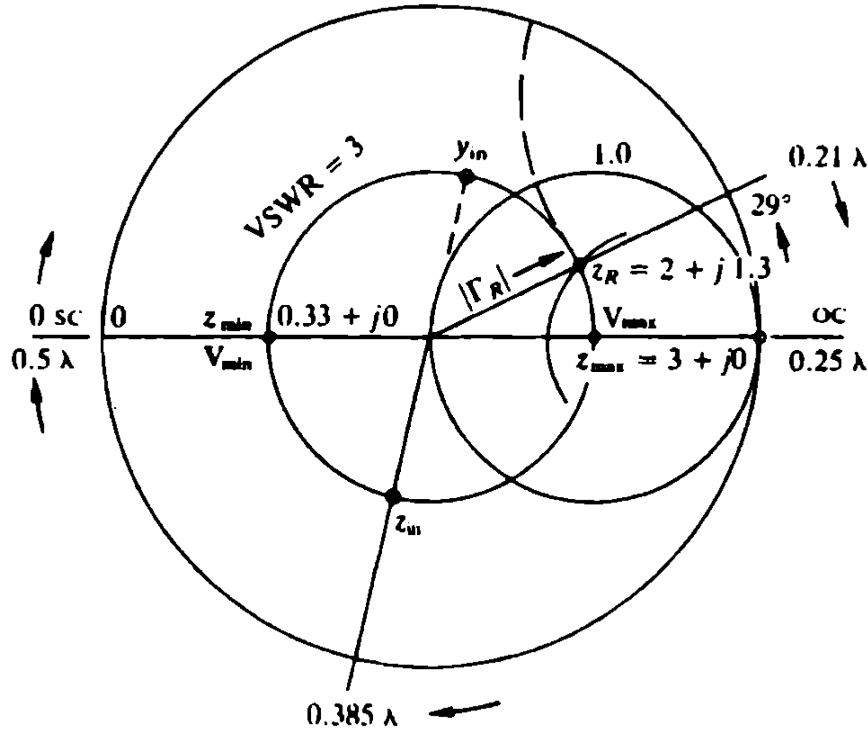
الحل: وقع على خريطة سميث المعاوقة النسبية للحمل

$$z_R = Z_R / R_0 = 2 + j1.3$$

كما هو مبين بشكل 14-6. ارسم الخط النصف قطرى من منتصف الخريطة إلى دائرة λ الخارجية مروراً بنقطة الحمل z_R. اقراء زاوية Γ_R على مقياس الزاوية $\phi_R = 90°$. قس المسافة من المركز حتى النقطة z وأوجد مقادير Γ_R و VSWR من على التدريج أسفل الخريطة.

$$|\Gamma_R| = 0.50 \Rightarrow \Gamma_R = 0.5\angle 29° \quad \text{and} \quad VSWR = 3.0$$

ارسم دائرة تمر بنقطة المعاوقة النسبية. لاحظ أن هذه الدائرة تقطع الخط الأفقى عند $3 + j0$. هذه النقطة للتقاطع تستخدم لحساب VSWR بدلاً من استخدام التدريج أسفل الخريطة لأن الدائرة تمثل قيمة ثابتة لـ VSWR. حدد نقطة تقاطع دائرة ثبوت VSWR مع خط نصف القطر الممتد من المركز حتى نقطة الدائرة المفتوحة جهة اليمين على خريطة Z. نقطة التقاطع يكون عندها أقصى جهد (أقل قيمة للتيار) والمعاوقة تكون لها أقصى قيمة. المعاوقة النسبية عند هذه النقطة هى $3 + j0$ وعلى ذلك تكون قيمة $z_{max} = 21. + j0\ \Omega$. لإيجاد المسافة بين الحمل وأول V_{max} استخدم المقياس الدائرى الخارجى (بدلالة طول الموجة فى اتجاه المنبع). يكون موقع الإسناد عند $0.21\ \lambda$ وخط القيمة العظمى عند $0.25\ \lambda$ على ذلك تكون المسافة $0.04\ \lambda$ فى اتجاه المنبع أو 3.2 cm من الحمل.



شكل 14-6 خريطة سميث للمسالة 6.3

من نقطة V_{max} تحرك $0.25\ \lambda$ فى اتجــاه المنبـع وحـدد نقطـة V_{min}. المعاوقـة النسبية $0.33 + j0$ و $Z_{min} = 23.1 + j0\ \Omega$. المسافة من الحمل حتـى أول قيمـة صغرى هى

$$0.25\lambda + 0.04\lambda = 0.29\lambda = 23.2\ \text{cm}$$

لإيجاد معاوقة الدخل لطول 54 cm، حرك $\frac{54}{80} = 0.675\lambda$ من الحمل فى اتجاه المنبع واقراء المعاوقة النسبية. يلاحظ أن دورة كاملة حول الدائرة هى $0.5\ \lambda$ لذلك حدد النقطة التى تبتعد $0.175\ \lambda$ من الحمل على التدرج الخارجى هذه النقطة تكون عند $0.385\ \lambda = 0.175\ \lambda + 0.21\ \lambda$. من خلا ل هذه النقطـة ارسـم خط نصف قطرى وحدد نقطة التقاطع مـع الدائـرة VSWR المعاوقـة النسـبية تكون $z_{in} = 0.56 - j\,0.71$. وتكون المعاوقة

$$Z_{in} = 39.2 - j\,49.7\ \Omega$$

مسامحة الدخل النسبية توجد على الجانب الآخر من القطر على الخريطة والتى تناظر مقلوب عدد مركب حيث $z_{in} = 0.56 - j\,0.71$ و $y_{in} = 0.68 + j0.87$ وتكون المسامحة للدخل

$$Y_{in} = \frac{y_{in}}{R_0} = (9.71 + j12.4)\ \text{mS}$$

الفصل السابع
الهوائيات
Antennas

فى هذا الفصل:

- ✔ الجهد المغناطيسى المتجه والمجالات المشعة
- ✔ هوائى هيرتيزيان ثنائى القطبية
- ✔ خصائص الهوائى
- ✔ ثنائى القطبية وأحادى القطبية بطول محدد
- ✔ مسائل محلولة

معادلات ماكسويل التى تمت دراستها فى الفصل 5. تنبأت بالموجات المستوية المنتشرة فى وسط غير محدد خالٍ من المنابع. فى هذا الفصل سوف ندرس الموجات المنتشرة والناتجة عن منبع تيار. منابع التيار هى نماذج للهوائيات. بصفة عامة فإن الموجات لها واجهات موجية كروية وقيمتها تعتمد على اتجاه الانتشار. خلال هذا الفصل سيتم فرض أن الوسط خالٍ من المنابع.

الجهد المغناطيسى المتجه والمجالات المشعة
Magnetic Vector Potential and Radiated Fields

فى الفصل 2، تم الحصول على شدة المجال الكهربى **E** أولاً عن طريق

توزيع شحنة معلومة. ثم استخدام الجهد الكهربى المقياسى V ووجد أن $\mathbf{E}$ تكون دالة فى V:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

بالمثل فإن الجهد المغناطيسى المتجه $\mathbf{A}$ يُعَرف بحيث أن

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

وهو يخدم كقيمة ابتدائية لحساب $\mathbf{B}$ ومنها $\mathbf{H}$ وأيضًا $\mathbf{E}$. بإعادة كتابة المعادلة بدلالة $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} = \frac{u}{\eta}\nabla \times \mathbf{A} \qquad (1)$$

حيث $u = 3 \times 10^8$ m/s و $\eta = 120\pi\,\Omega$. باستخدام قانون فارادای (فصل 4) يمكن إيجاد المجال الكهربى

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{u}{j\beta}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \qquad (2)$$

ومتجه الطور $\mathbf{A}$ يعطى بالآتى

$$\mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu(\mathbf{J}_s\, e^{-j\beta R})}{4\pi R}\, dv \qquad (3)$$

فى المعادلة (3) R هى المسافة بين نقطة الملاحظة Observation Point وعنصر تيار المنبع $\mathbf{J}_s dv$. ومعنى المعامل $e^{-j\beta R}$ يصبح واضحًا عند تحويل $\mathbf{A}$ إلى المجال الزمنى:

$$\mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu\,\mathbf{J}_s \cos(\omega t - R/u)}{4\pi R}\, dv$$

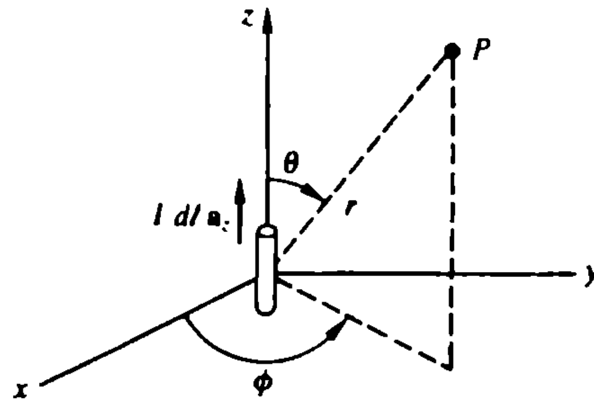
على ذلك فإن $\mathbf{A}$ عند نقطة الملاحظة تعكس بشكل مناسب الحالة عند المنبع فى أوقات سابقة ـ حيث يكون التأخير لأى عنصر منبع معين بشكل دقيق هو الزمن R/u المطلوب لشرط الانتشار إلى نقطة الملاحظة.

هوائى هيرتيزيان ثنائى القطبية

Hertzian Dipole Antenna

الجهد المغناطيسى المتجه المتولد من هوائى هيرتيزيان ثنائى القطبية (عنصر تيار متناهى الصغر (شكل 1-7) باستخدام (3) هو

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}(I\,d\ell)\mathbf{a}_z$$



شكل 1-7 هوائى هيرتيزيان ثنائى القطبية

باستخدام الإحداثيات الكروية $\mathbf{a}_z = \cos\theta\mathbf{a}_r - \sin\theta\mathbf{a}_\theta$ وباستخدام المعادلات (1) و (2) فإن المجال المغناطيسى والكهربى هو

$$H_\phi = \frac{I\,d\ell}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\, e^{-j\beta r}\left[j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2}\right] \qquad (4)$$

$$E_r = \eta\frac{2I\,d\ell}{4\pi}\beta^2 \cos\theta\, e^{-j\beta r}\left[\frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right] \qquad (5)$$

$$E_\theta = \eta\frac{I\,d\ell}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\, e^{-j\beta r}\left[j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right] \qquad (6)$$

وجميع المركبات الأخرى تساوى صفراً

☆ ملاحظة!

سوف يقتصر الاهتمام على المجال البعيد ($r >> 1$) وفيه تهمل القيم $1/r^2$ و $1/r^3$ بالنسبة لـ $1/r$. (هذا يعنى أنه لـ $r >> 1$ فإن $1/r^2 << 1/r$ و $1/r^3 << 1/r$).

باستخدام (4) و (5) و (6) المجال البعيد Far Fields هو

$$H_\phi = j\frac{I\,d\ell\beta}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r} \tag{7}$$

$$E_\theta = \eta\, j\frac{I\,d\ell\beta}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r} = \eta\, H_\phi \tag{8}$$

من الواضح أن (7) و (8) تمثلان موجة كروية منتشرة وعند أى نقطة يكون اتجاه الانتشار $+\mathbf{a}_r$ والمقدار يتناقص مع $1/r$.

القدرة المشعة بواسطة الهوائى يمكن الحصول عليها من المتوسط الزمنى لمتجه بيونتنج Poynting Vector. متجه بيونتنج هو كثافة القدرة للمجال المشع وله وحدات W/m^2. المتوسط الزمنى لمتجه بيونتنج يعرف كما يلى

$$\mathscr{P}_{avg} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) \tag{9}$$

حيث $\mathbf{H}^*$ المترافق المركب لـ $\mathbf{H}$. هذا يتبع حساب القدرة فى تحليل الدوائر حيث أن القدرة المتوسطة $P_{avg} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(VI^*)$. لإيجاد القدرة المتوسطة المشعة من الهوائى نكامل $\mathscr{P}_{avg}$ على سطح كرة تحيط بالهوائى:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}_{avg}\bullet d\mathbf{S}_{sphere} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}_{avg}\bullet(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\mathbf{a}_r)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(E_\theta H_\phi^*)\right]r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\eta(\beta I\, d\ell)^2}{12\pi} = \frac{\eta\pi I^2}{3}\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \quad \text{(W)} \tag{10}$$

خصائص الهوائى Antenna Parameters

مقاومة الإشعاع R_{rad} Radiation Resistance تعرف علـى أنـها قيمـة افتراضيـة لمقاومة تستهلك قدرة مساوية للقدرة المشعة للهوائى عندما تغذى بنفس التيار أى $P_{rad} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}, R_{rad} = 2P_{rad}/I_0^2$، حيث I_0 هـى القيمـة العظمى للتيار عند نقطة التغذية. بالنسبة للهوائى الهيرتيزيان ثنائى القطبية، وباستخدام (10)

$$R_{rad} = \frac{2\pi\eta}{3}\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \approx 790\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega)$$

نموذج الإشعاع Radiation Pattern $F(\theta, \phi)$ لأى هوائى يعطى التغير النسبى للمجال البعيد **E** أو **H** (عند مسافة بعيدة) مع الاتجاه. بفرض أن تكون r ثابتة. بالنسبة للهوائـى الهيرتيزيان ثنائى القطبية $F(\theta, \phi)$ تختصر إلـى $F(\theta) = \sin\theta$ حيث |**E**|، |**H**| لا تعتمد على ϕ.

شدة الإشعاع Radiation Intensity $U(\theta, \phi)$ هى مقياس آخر لأداء الهوائى وهى تعرف على أنـها المتوسـط الزمنـى للقـدرة المشعـة لكـل وحـدة زاويـة مُجَسمة. أى هى دالة القدرة بالنسبة للزاوية (انظر شكل 2-7). هنا يجب ملاحظة أن الرمز للزاوية المجسمة هـو أيضًـا Ω. ولا يجـب الخلـط بينـها وبيـن وحـدة المقاومة، أوم. باستخدام المعادلة (10) يمكن التعبير عن القدرة المتوسطة

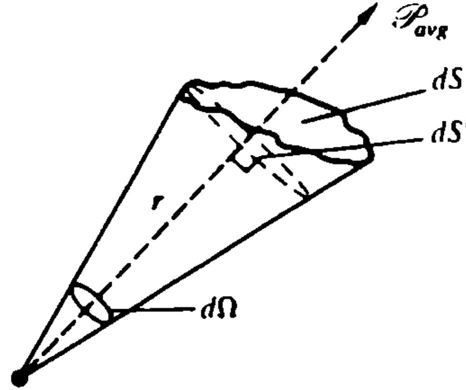
$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P}_{avg} \bullet d\mathbf{S}_{sphere} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mathscr{P}_{avg} \bullet r^2 \mathbf{a}_r)\sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\phi)\sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U(\theta,\phi) \, d\Omega$$

على ذلك تكون شدة الإشعاع ووحدة الزاوية المجسمة

$$\Rightarrow U(\theta,\phi) \equiv (\mathscr{P}_{avg} \bullet r^2 \mathbf{a}_r) \quad (\mathrm{W/sr})$$

$$\Rightarrow d\Omega \equiv \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (\mathrm{sr})$$



شكل 2-7 تعريف شدة الإشعاع $U(\theta, \phi)$

حيث sr هى الزاوية النصف قطرية المجسمة. حيث أن U لا تعتمد على r (بقاعدة بقاء الطاقة) فإن المجال على مسافة بعيدة يمكن أن يستخدم فى التقييم. لهوائى الهيرتيزيان ثنائى القطبية وباستخدام (7) حتى (10)

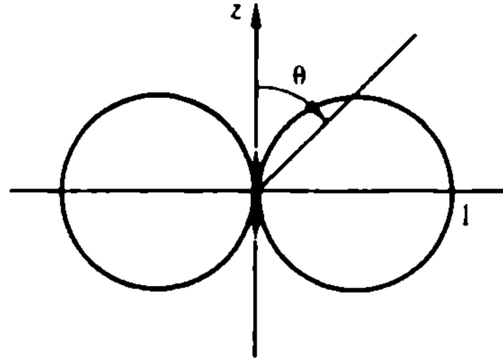
$$U(\theta) = \frac{\eta}{8}\left(\frac{I\,d\ell}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta \quad (\mathrm{W/sr}) \tag{11}$$

التخطيط القطبى لنموذج الإشعاع $F(\theta)$ وشدة الإشعاع $U(\theta)$ لهوائى الهيرتيزيان ثنائى القطبية مبين بشكل 3-7.

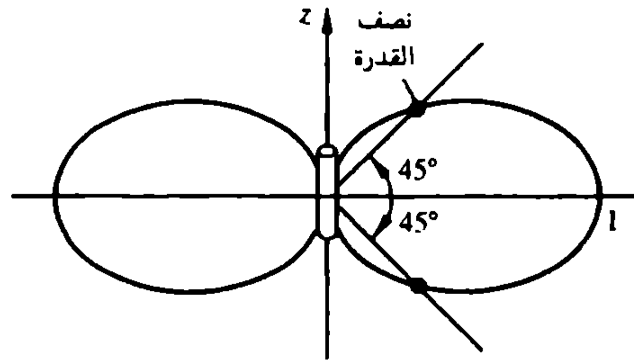
فى شكل 3-7 نقطتى نصف القدرة Half-Power عند $\theta_{Hp1} = 45°$ و $\theta_{Hp2} = 135°$ واتساع حزمة نصف القدرة تكون $\theta_{Hp} = \theta_{Hp2} - \theta_{Hp1} = 90°$.

✓ يجب أن تعرف

بصفة عامة، كلما قل اتساع الحزمة (حول اتجاه القيمة العظمى U_{max}) كلما كانت اتجاهية الهوائى أكبر، هذا يعنى أن القدرة المشعة تتركز فى حيز زاوى صغير.



(a) □ $F(\theta)$



(b) $U(\theta)$

شكل 3-7 نموذج الإشعاع F وشدة الإشعاع U

الكسب الاتجاهى $D(\theta,\phi)$ لهوائى ما يُعَـرف علـى أنـه نسـبة كثافـة الإشعـاع $U(\theta,\phi)$ إلى كثافة الإشعاع U_0 من مُشع افتراضى له إشعـاع متسـاوٍ فـى كـل الاتجاهات، بحيث أن القدرة الكلية المشعـة P_{rad} هـى نفسـها فـى الحـالتين للمشع المتساوى الاتجاهات،

$$U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

لذلك فإن الكسب الاتجاهى للهوائى

$$D(\theta,\phi) = \frac{U(\theta,\phi)}{U_0} = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_{rad}} \qquad (12)$$

الاتجاهية D للهوائى هى أقصى قيمة للكسب الاتجاهى

$$D = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} \qquad (13)$$

للهوائى الهيرتيزيان ثنائى القطبية وباستخدام (10) و (11) فى (12) و (13) يكون الكسب الاتجاهى

$$D(\theta,\phi) = \frac{(4\pi)\dfrac{\eta}{8}\left(\dfrac{I\,d\ell}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta}{\left(\dfrac{\eta\pi}{3}\right)\left(\dfrac{I\,d\ell}{\lambda}\right)^2} = 1.5\sin^2\theta$$

وتكون الاتجاهية $D = 1.5$.

كفاءة الإشعاع للهوائى $e_{rad} \equiv P_{rad}/P_{in}$، حيث P_{in} هى المتوسط الزمنى للقدرة التى يستقبلها الهوائى من المنبع. كسب القدرة $G\ (\theta,\phi)$ يعرف بأنه هو الكسب الاتجاهى مضروبًا فى كفاءة الإشعاع:

$$G(\theta,\phi) \equiv e_{rad}\ D(\theta,\phi) = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_{in}} = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_{rad} + P_L}$$

حيث P_L هو الفقد للقدرة الأومى للهوائى. المشع عديم الفقد عديم الاتجاهية له كسب قدرة $G_0 = 1$. من الممكن التعبير عن كسب القدرة للهوائى بالديسيبل Decibels حيث

$$G_{dB} = 10\log_{10} G(\theta,\phi)$$

ثنائى القطبية وأحادى القطبية بطول محدد

Finite-Length Dipole and Monopole

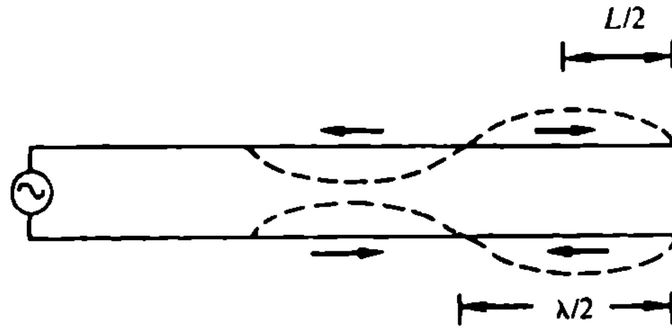
المعادلة (10) للقدرة المشعة من هوائى ثنائى القطبية هيرتيزيان تشمل الحد $(d\ell/\lambda)^2$ والذى يبين أن الطول يمكن مقارنته بطول الموجة. لخط نقل ذى

سلكين ودائرته مفتوحة كما بالشكل (a) 7-4 التياران بالموصلين لهما زاويتان متضادتان ولذلك يتلاشى تقريبًا المجال البعيد. نحصل على هوائي ذى كفاءة عالية عندما ينفتح الخط كما بالشكل (b) 7-4 وبذلك ينتج التياران

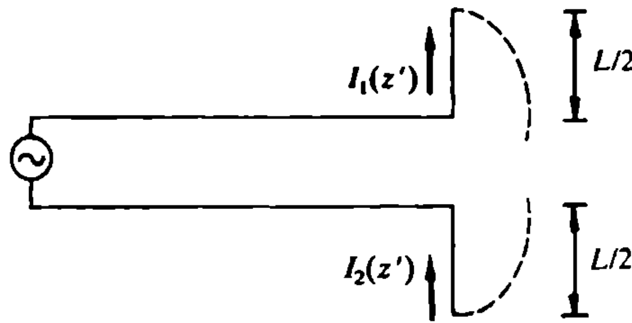
$$I_1(z') = I_m \sin\beta\left(\frac{L}{2} - z'\right), \quad 0 < z' < L/2$$

و

$$I_2(z') = I_m \sin\beta\left(\frac{L}{2} + z'\right), \quad -L/2 < z' < 0$$



(a)



(b)

شكل 4-7 (a) خط نقل دائرته مفتوحة. (b) هوائى ثنائى القطبية.

وهذان التياران لهما نفس الزاوية بالضبط عند نقطتين كصورة مرآة على محور z. والتياران يتلاشيان عند نقط النهاية $z' = \pm L/2$. على أساس أن طول الهوائى L. التيار عند نقطة التغذية $z' = 0$ يرتبط بأقصى تيار عن طريق

$$I_0 = I_m \sin\frac{\beta L}{2}$$

المجال على مسافة بعيدة يمكن حسابه عن طريق (1) و (2) و (3) تحت شرط $r >> L$ و $r >> \lambda$.

$$H_\phi = \frac{jI_m e^{-j\beta r}}{2\pi r} F(\theta), \qquad E_\theta = \eta\, H_\phi$$

وتكون دالة نموذج الإشعاع

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\beta \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right)}{\sin\theta}$$

لطول L حتى $1.2\,\lambda$ يكون نموذج الإشعاع شبيه بالرقم 8. ويصبح حاد أكثر كلما اقتربت L من $1.2\,\lambda$. من الناحية الأخرى عندما تكون $L << \lambda$ يكون النموذج كما فى حالة الهوائى الهيرتيزيان ثنائى القطبية المبين بشكل (a) 3-7. عندما تصبح L أكبر من $1.2\,\lambda$ يصبح النموذج (كما بشكل 5-7) له فصوص متعددة Multi-Lobed.

يمكن بيان أن مقاومة الإشعاع لهوائى ثنائى القطبية له طول يعطى بالمعادلة $(2n - 1)\lambda/2$ حيث ... $n = 1, 2, 3,$ تكون قيمتها

$$R_{rad} = 30\ \text{Cin}[(4n - 2)\pi](\Omega)$$

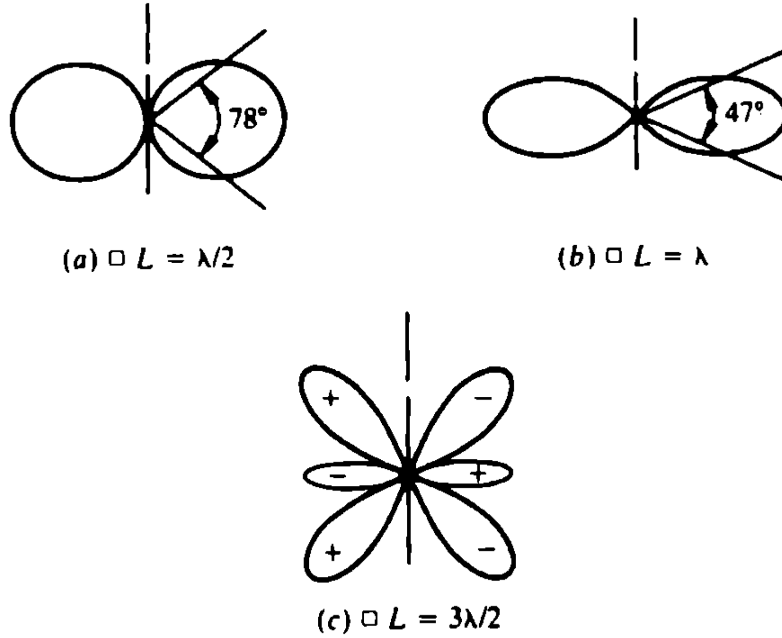
حيث

$$\text{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos y}{y}\, dy$$

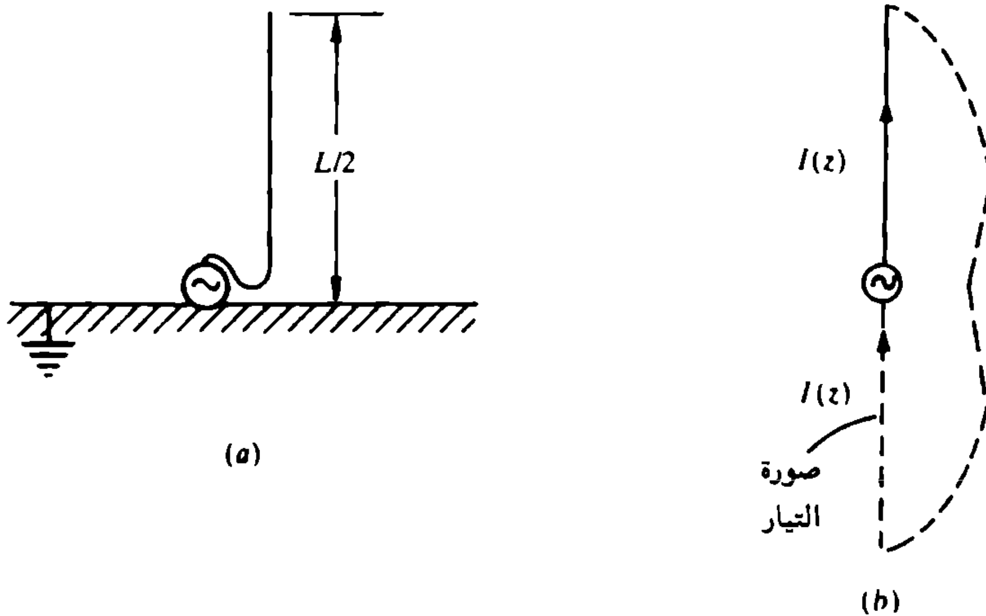
هى دالة لها جداول.

الهوائى الهام والمستخدم بكثرة هو ثنائى القطبية بطول نصف الموجة $(n = 1)$ فى هذه الحالة $R_{rad} = 30\ (2.438) = 73\ \Omega$ و $D = 1.64$.

لموصل طوله $L/2$ عمودى على مستوى أرضى موصل [شكل (*a*) 7-6] يكون هوائى أحادى القطبية. نظرية الصورة Image Theory يمكن أن تستخدم لتكوين المسألة المكافئة وهى ثنائى قطبية فى الفراغ الحر [انظر شكل (*b*) 7-6].



شكل 7-5 نموذج الإشعاع لهوائى ثنائى القطبية



شكل 7-6 (*a*) **هوائى أحادى القطبية** (*b*) **هوائى ثنائى القطبية مكافئ.**

عند تغذية القاعدة فإن المجال E و H الناشئ لـهوائى أحـادى القطبيـة يتساوى مع ثنائى القطبية وذلك فى مناطق أعلى المستوى الأرضى.

حيث أن أحادى القطبيـــة يشـع قـدره فقـط فـى الوسـط أعلـى المسـتوى الأرضى فإن القدرة الكلية المشعة هى نصف القدرة المشعة من ثنائى القطبيـة المناظر. مـن العلاقة $R_{rad} = 2P_{rad}/I_0^2$ يستنتج مـن هـذا أن مقاومة الإشعاع لإحادى القطبية هى نصف قيمتها فى حالة ثنائى القطبية. ومن ذلك إذا كـان $L/2 = \lambda/4$ (أحادى القطبية طوله ربع طول الموجة)، فإن $R_{rad} = 36.5\ \Omega$.

أشياء هامة للتذكر

- ✔ الهوائيات تشع موجات كروية منتشرة.
- ✔ الاتجاهية للهوائى هى نسبة أقصى شـدة إشعـاع U إلـى شـدة الإشعـاع لهوائى موحد الاتجاهات له نفس قدرة الإشعاع الكلية.
- ✔ مركبة التيار الغالب لهوائى خطى ثنائى القطبية موجة واقفة جيبية.
- ✔ المجال المشع لأحادى القطبية يساوى المجال لثنائى القطبيـة المنـاظر لوسط أعلى المستوى الأرضى.

Solved Problems مسائل محلولة

مسألة محلولة 7.1 هوائى ثنائى القطبية يغذى من منتصفه بتيـار فـى اتجـاه z وله طول كهربى $L/\lambda << 1/30$. (a) أثبـت أن توزيـع التيـار يمكـن افتراضـه مثلث الشكل. (b) أوجد مركبات الجهد المغناطيسى المتجهة **A**.

Solved Problem 7.1 A center-fed dipole with a z-directed current has electrical length $L/\lambda << 1/30$. (*a*) Show that the current distribution may be assumed to be triangular in form. (*b*) Find the components of the vector magnetic potential **A**.

الحل: حيث

$$(a) \qquad \beta\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)<\beta\frac{L}{2}=\pi\frac{L}{\lambda}<<\frac{1}{10}$$

على ذلك

$$I(z')=I_m\sin\beta\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)$$
$$\approx I_m\beta\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\approx\frac{2I'_m}{L}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)$$

حيث $I'_m=I_m\frac{\beta L}{2}$ وهذا التوزيع مثلث الشكل

$$(b) \quad \mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}I(z')\mathbf{a}_z\left(\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}\right)dz'$$
$$=\frac{2\mu I'_m e^{-j\beta r}}{4\pi L r}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\mathbf{a}_z\,dz'=\frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\,\mathbf{a}_z$$

ومنها

$$\mathbf{A}_r=A_z\cos\theta=\frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\cos\theta$$
$$\mathbf{A}_\theta=-A_z\sin\theta=-\frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\sin\theta$$
$$\mathbf{A}_\phi=0$$

مسألة محلولة 7.2 هوائى ثنائى القطبية هيرتيزيان لـه طـول $L=2\text{m}$ ويعمـل عند تردد 1 MHz. أوجد الكفاءة الإشعاعية إذا كان الموصل من النحاس له $\sigma_c=5.7\times10^7$ s/m و $\mu_r=1$ ونصف القطر $a=1$ mm.

Solved Problem 7.2 A Hertzian dipole of length $L=2$ m operates at 1 MHz. Find the radiation efficiency if the copper conductor has $\sigma_c=5.7\times10^7$ S/m, $\mu_r=1$ and radius $a=1$ mm.

الحل: الكفاءة الإشعاعية هى

$$e_{rad} = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{loss}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}}$$

حيث R_{rad} هى مقاومة الإشعاع و R_{loss} هى المقاومة الأومية. نصف القطر a أكبر بكثير من العمق السطحى

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} = \frac{1}{15}\ \text{mm}$$

على ذلك يمكن افتراض أن التيار موجود بقشرة أسطوانية سمكها δ، يعطى مقاومة فقد (مشابهة لحالة سلكين متوازيين بالفصل السادس)

$$R_{loss} = \frac{1}{\sigma_c}\frac{L}{(2\pi a)\delta} = 0.084\ \Omega$$

ومقاومة الإشعاع

$$R_{rad} = (790)\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = (790)\left(\frac{Lf}{u}\right)^2 = 0.035\ \Omega$$

وعلى ذلك تكون كفاءة الإشعاع

$$e_{rad} = \frac{0.035}{0.119} = 29.4\%$$

مسألة محلولة 7.3 (a) أوجد التيار اللازم لإشعاع قدره 100 W عند 100 MHz من هوائى هيرتيزيان ثنائى القطبية 0.01 m. (b) أوجد قيمة **E** و **H** عند (100 m, 90°, 0°).

Solved Problem 7.3 (a) Find the current required to radiate a power of 100 W at 100 MHz from a 0.01-m Hertzian dipole. (b) Find the magnitudes of **E** and **H** at (100m, 90°, 0°).

الحل: (a) طول الموجة.

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$$

مقاومة الإشعاع

$$R_{rad} = (790)\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 = 8.78 \times 10^{-3}\ \Omega = \frac{2P_{rad}}{I^2}$$

الحل بالنسبة للتيار

$$I = \sqrt{\frac{200}{8.78 \times 10^{-3}}} = 151 \text{ A}$$

(هذا التيار كبير جدًا ويوضح أن الـهوائى مع طـول أقـل كثـيرًا مـن طـول الموجة لا يعمل بكفاءة)

$$(b)\ |\mathbf{E}| = \frac{\eta \beta I\, d\ell}{4\pi r} \sin 90° = 0.95 \text{ V / m}$$

$$|\mathbf{H}| = \frac{\beta I\, d\ell}{4\pi r} \sin 90° = 2.52 \times 10^{-3} \text{ A / m}$$

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)

Absolute potential الجهد المطلق

Ampere أمبير

Ampere's law قانون أمبير

Antennas هوائيات

(B)

Biot-Savart law قانون بايو-سوفار

Boundary conditions شروط الحدود

Boundary reflection coefficient

معامل الانعكاس عند الحدود

Brewster angle زاوية بروستر

(C)

Capacitance السعة

Characteristic impedance

المعاوقة المميزة

Conduction current density

كثافة تيار التوصيل

Conductors موصلات

Conservative field مجال محافظ

Continuity equation معادلة الاستمرارية

Coordinate systems أنظمة الإحداثيات

Coulomb forces قوى كولوم

Coulomb's law قانون كولوم

Curl of a vector التفاف متجه

Current and conductors

التيار والموصلات

Current density كثافة التيار

Cylindrical coordinates

الإحداثيات الأسطوانية

(D)

Dielectric عازل

Dielectric constant ثابت العازل

Differential volume حجم تفاضلى

Differential surface سطح تفاضلى

Differential elements

عناصر خطية تفاضلية

Dipole and monopole

ثنائى القطبية وأحادى القطبية

Directive gain الكسب الاتجاهى

Displacement current تيار إزاحة

Distributed parameters العناصر الموزعة

Divergence theorem نظرية الانفراج

(E)

Electric current تيار كهربى

Electric field intensity

شدة المجال الكهربى

Electric flux التدفق الكهربى

Electromagnetic waves

الموجات الكهرومغناطيسية

Energy طاقة

Equations: معادلات:

continuity الاستمرارية

Maxwell's ماكسويل
scalar wave مقياسية للموجة
vector wave متجه للموجه
wave الموجة

(F)

Faraday's law قانون فارادای
Finite-length dipole and monopole
طول محدود لثنائى القطبية وأحادى القطبية
Flux linkage وصْلّية التدفق
Frequency تردد

(G)

Gauss' law قانون جاوس
Geometrical factor
معامل الشكل الهندسى

(H)

Half-power beam points
نقاط نصف القدرة للشعاع
Henries per meter هنرى لكل متر
Hertzian dipole antenna
هوائى ثنائى القطبية هرتيزى

(I)

Image theory نظرية الصورة
Induced EMF
القوة الدافعة الكهربية (ق.د.ك) المستحثة
Inductance محاثة أو معامل الحث
Interface conditions for normal incidence
شروط سطح التقابل للسقوط العمودى
Intrinsic impedance of medium
المعاوقة الذاتية للوسط
Isotropic medium وسط موحد الخواص
Isotropic radiator مشع موحد الاتجاهات

(L)

Lenz's law لنز
Line elements عنصر خطى

(M)

Magnetic field intensity
شدة المجال المغناطيسى
Magnetic flux density
كثافة التدفق المغناطيسى
Magnetic vector potential
الجهد المغناطيسى المتجه
Maxwell's equations معادلات ماكسويل

(N)

Nonmagnetic materials
مواد غير حديدية
Normal component المركبة العمودية

(O)

Oblique incidence سقوط مائل
Ohm's law قانون أوم

(P)

Permeability سَماحية
Permittivity إنفاذية
Plane of incidence مستوى السقوط
Plane waves موجات مستوية
Potential جهد
Propagation constant ثابت الانتشار
Propagation in various media
الانتشار فى وساط متعددة

(R)

Radiated fields مجالات مُشعة

Radiation الإشعاع
- efficiency كفاءة الإشعاع
- intensity شدة الإشعاع
- pattern نموذج الإشعاع
- resistance مقاومة الإشعاع

Reflection coefficients
معاملات الانعكاس

Right-hand rule قاعدة اليد اليمنى

(S)

Scalar wave equation
معادلة موجة مقياسية

Sinusoidal steady state excitation
تغذية جيبية مستقرة

Skin depth عمق سطحى

Slotted line خط مشقوق

Smith chart خريطة سميث

Snell's laws قوانين سنيل

Sources and sinks منابع ومستقبلات

Static electric fields
مجالات كهربية ساكنة

Static magnetic fields
مجالات مغناطيسية ساكنة

Steradian زاوية نصف قطرية مجسمة

Stoke's theorem نظرية استوكس

Surface سطح

(T)

Tangential component مركبة مماسية

Tesla تسلا

Theorems: نظريات
- divergence التشعب
- Stoke's استوكس

Time varying fields
مجالات متغيرة مع الزمن

Transients in lossless lines
الموجات العابرة على خطوط نقل عديمة الفقد

Transmission coefficients
معاملات الإرسال

Transmission line models
نماذج خط النقل

Transmission lines خطوط النقل

(V)

Vector algebra جبر المتجهات

Vector analysis تحليل المتجهات

Vector notation اصطلاحات المتجهات

Vector wave equations
المعادلات المتجهة للموجة

Voltage standing wave ratio
نسبة الجهد لموجة واقفة

(W)

Wave equations معادلات الموجة

Wave-length طول الموجة

Work شغل

Study Guides/Electromagnetics

When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering electromagnetics fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing electromagnetics to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

***Easy Outlines* give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.**

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study electromagnetics anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of electromagnetics easy way. *Schaum's Easy Outline of Electromagnetics* helps you master electromagnetics with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com

Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.

ISBN 977-282-147-8

